

3 Abbildungen in der Ebene

Wir behandeln in diesem Kapitel Abbildungen von Punkten der Ebene auf Punkte. Ziel dieser Betrachtung ist, Funktionsgraphen mit diesen Abbildungen (punktweise) abzubilden (Kap. 4). Dabei beschränken wir uns auf Abbildungen, bei denen die Funktionseigenschaft (die Eindeutigkeit der Zuordnung) erhalten bleibt. Daher beschränken wir uns auf folgende Abbildungen

- Verschiebungen
- Spiegelungen (an den Koordinatenachsen)
- Streckungen senkrecht zu den Koordinatenachsen

Die Abbildungen werden in analytischer Form dargestellt und behandelt, da diese dann direkt die Anwendung auf Funktionsgleichungen und deren Graphen zulässt.

Für die Beschreibung geben wir die Abbildungsgleichungen an, die darstellen, wie ein Ausgangspunkt $P(x;y)$ auf einen Bildpunkt $P'(x';y')$ abgebildet wird.

3.1 Verschiebungen

Die Verschiebung (Translation) $V_{\vec{a}}$ um einen Vektor $\vec{a}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$ gilt.

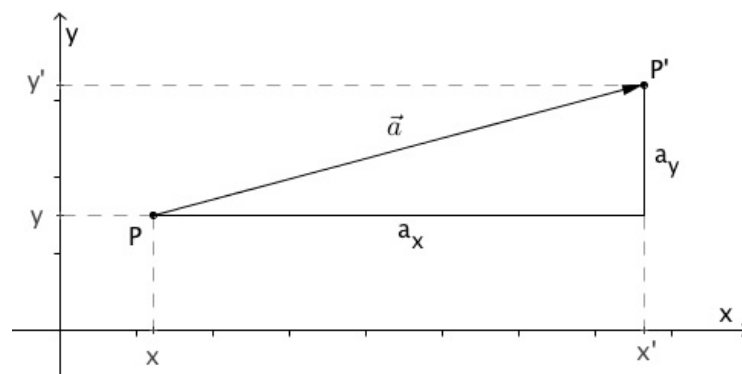


Abb. 3.1: Verschiebung eines Punktes um $\vec{a}$

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = x + a_x$$

$$y' = y + a_y$$



Beispiel

Bei der Verschiebung um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ wird jeder Punkt in x -Richtung um eine Einheit nach rechts und in y -Richtung um drei Einheiten nach unten verschoben.

3.2 Spiegelungen

Die Achsenspiegelung S_a an einer Geraden a (Achse) ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass

- (1) P' auf der Senkrechten s zur Achse a durch P liegt,
- (2) der Schnittpunkt von s mit a die Strecke $\overline{PP'}$ halbiert.

Eine allgemeine Achsenspiegelung erhält aber nicht unbedingt die Funktionseigenschaft, also die Eindeutigkeit der Zuordnung. Daher wollen wir uns hier auf Spiegelungen an den Koordinatenachsen beschränken.

3.2.1 Spiegelung an der y -Achse

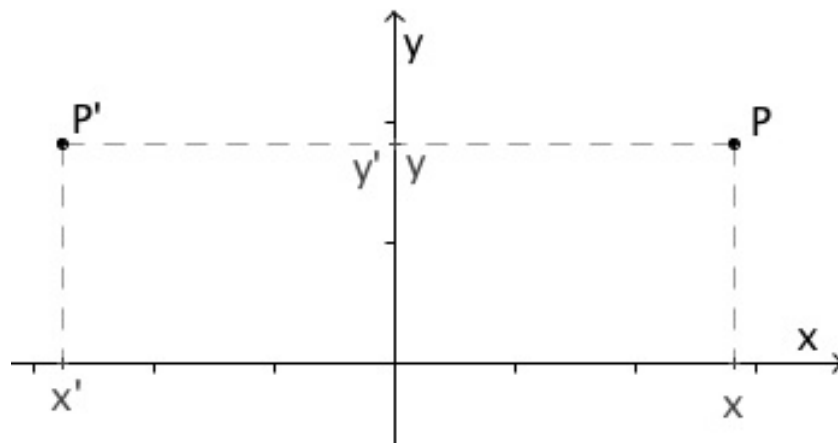
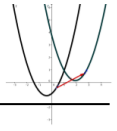


Abb. 3.2: Spiegelung eines Punktes an der y -Achse

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = -x$$

$$y' = y$$



3.2.2 Spiegelung an der x-Achse

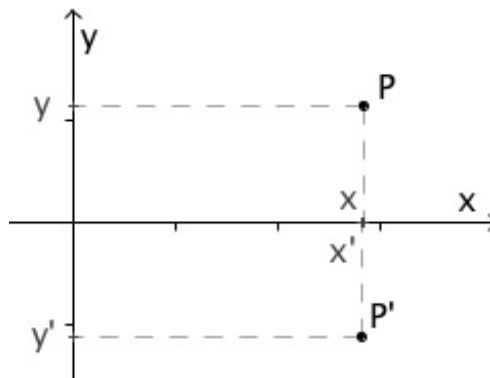


Abb. 3.3: Spiegelung eines Punktes an der x-Achse

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

3.3 Drehungen

Die Drehung um einen Punkt Z und einen Winkel δ ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass

- (1) P' auf dem Kreis um Z durch P liegt,
- (2) die Strecken $\overline{ZP}$ und $\overline{ZP'}$ den Winkel δ einschließen.

Auch hier bleibt im Allgemeinen die Funktionseigenschaft nicht erhalten, so dass wir auch hier einen Sonderfall herausgreifen, nämlich die Drehung um 180° , auch Punktspiegelung genannt. Als Drehzentrum wählen wir den Ursprung O .

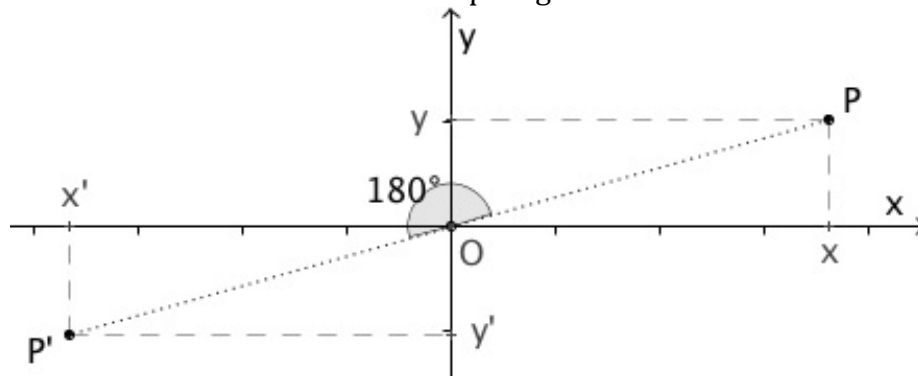


Abb. 3.4: Drehung eines Punktes um den Ursprung um 180°

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = -x$$

$$y' = -y$$



3.4 Streckungen

Bei den Streckungen ist vor allem die Zentrische Streckung bekannt, bei der in Bezug auf einen Punkt, das Streckzentrum, gestreckt wird. Wir möchten hier zwei Fälle vorwegnehmen, bei denen senkrecht zu einer Achse gestreckt wird.

Die Achsenstreckung senkrecht zu einer Achse a mit dem Streckfaktor k ($k \neq 0$) ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass

- (1) P' auf der Geraden s senkrecht zu a durch P liegt,
- (2) Ist S der Schnittpunkt von s und a , so gilt: $|SP'| = k \cdot |SP|$

Wir beschränken uns auf Streckungen senkrecht zu den Koordinatenachsen.

3.4.1 Streckungen senkrecht zur x -Achse

Bei dieser Streckung wird die y -Koordinate gestreckt, während die x -Koordinate für den Bildpunkt die gleiche wie die des Ausgangspunktes ist.

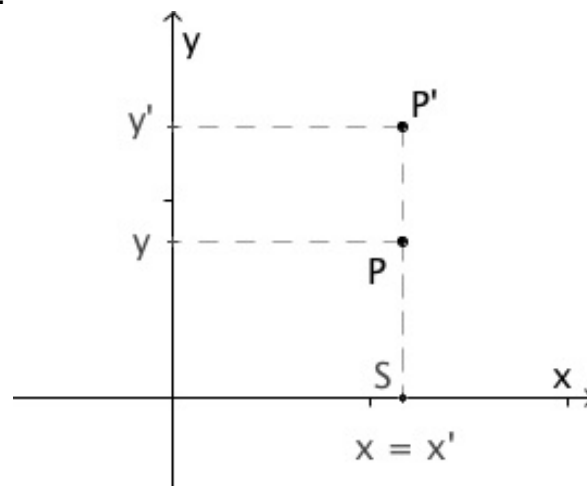
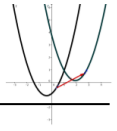


Abb. 3.5: Streckung eines Punktes senkrecht zur x -Achse

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = x$$

$$y' = ky$$



3.4.2 Streckungen senkrecht zur y-Achse

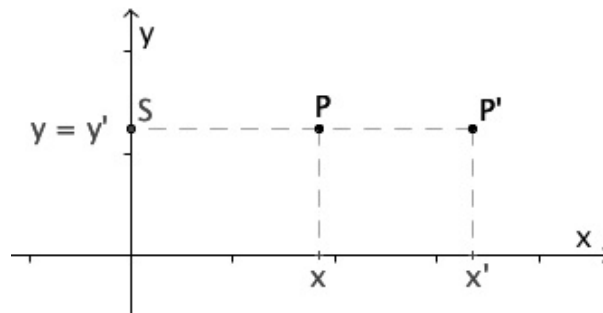


Abb. 3.5: Streckung eines Punktes senkrecht zur y-Achse

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = kx$$

$$y' = y$$

3.4.3 Zentrische Streckungen

Die zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ($k \neq 0$) ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' so zuordnet, dass

(1) P' auf der Geraden durch Z und P liegt,

(2) $|ZP'| = k \cdot |ZP|$

Die Längenmaße ändern sich mit dem Faktor k , die Flächenmaße mit dem Faktor k^2 .

Als Streckzentrum wählen wir den Ursprung O .

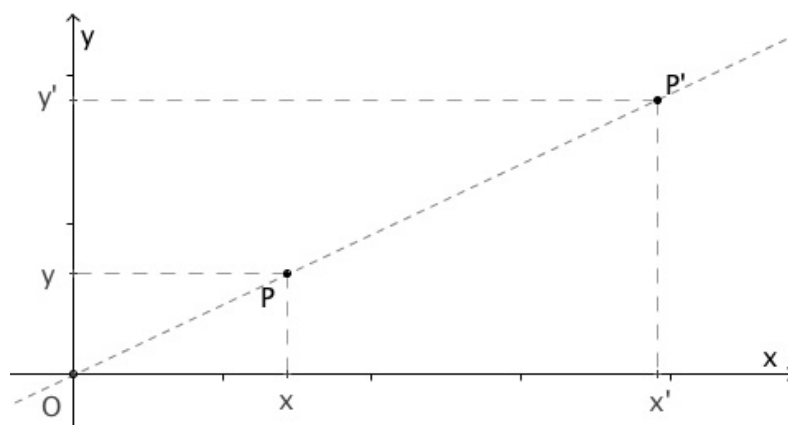


Abb. 3.6: Zentrische Streckung eines Punktes am Ursprung

Für die Koordinaten von Punkt und Bildpunkt gelten die Abbildungsgleichungen

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$