# 1 Funktionen

Der Begriff der Funktionen, oder noch allgemeiner der Zuordnungen, ist grundlegend für die Mathematik und ihre Anwendung. Er ist so wesentlich, dass er fast immer auftaucht. Dabei wird er jedoch nicht in seiner allgemeinen Bedeutung verwendet, sondern es werden gewisse Aspekte und Betrachtungsweisen hervorgehoben.
Selbstverständlich werden wir hier auf diese allgemeine Betrachtung eingehen, uns dann jedoch zielgerichtet der grafischen Darstellung von Funktionen zuwenden.

## 1.1 Zuordnungen

Zuordnungen spielen in unserer Umwelt eine große Rolle. Wir erkunden ein Wissensgebiet in zwei anfänglichen Stufen (Es gibt noch weitere Stufen, das spielt hier aber keine Rolle.): 1. Wir sammeln die Objekte, die vorhanden sind 2a. Wir untersuchen die Beziehungen, die zwischen diesen Objekten bestehen 2b. Wir untersuchen die Beziehungen der Objekte zum Raum (Wo ist ein Objekt?) und zur Zeit (Wie alt ist ein Objekt?). Auf dieser zweiten Stufe geht es bereits um Zuordnungen.
Beispiele:
Jedem Menschen werden im Laufe seines Lebens verschiedene andere Menschen zugeordnet. Bei Geburt werden jedem Menschen eine Mutter und ein Vater zugeordnet. Dazu kommen die anderen Menschen über die verwandtschaftlichen Beziehungen. Später kommt vielleicht eine Kindergärtnerin dazu, dann eine erste Klassenlehrerin.

Solch eine Zuordnung wird über eine Zuordnungsvorschrift beschrieben. „Jedem Menschen wird seine erste Klassenlehrerin zugeordnet." Wenn wir genauer klären wollen, wem hier genau wer zugeordnet wird, bemerken wir aber auch, dass die Zuordnungsvorschrift allein das nicht klärt. Wir müssen auch wissen, wer überhaupt einmal zur Schule gegangen ist. Menschen, die nie zur Schule gegangen sind, wird hier nichts zugeordnet.
Tatsächliche Zuordnungsbeispiele schreiben wir in Paaren auf.
(Karl, Frau Müller) soll dann bei der Zuordnung der ersten Klassenlehrerin bedeuten, dass Karl als erste Klassenlehrerin Frau Müller hatte. <u>Eine Zuordnung ist dann eindeutig definiert, wenn wir alle Zuordnungspaare kennen oder ermitteln können.</u>
Es wird Zeit, dass wir etwas formaler werden.

**Definiton**
Gegeben sind zwei Mengen $A$ und $B$. Dann ist das Kartesische Produkt (manchmal auch Kreuzprodukt genannt)
$$A \times B = \left\{ \left(a,b\right) \mid a \in A \text{ und } b \in B \right\}.$$

Wenn A und B endliche Mengen sind, so kann man das Kartesische Produkt sehr übersichtlich aufschreiben.
Beispiel:
$A$ ={1, 2, 5, 8} und $B$ = {a, C, M, x} dann umfasst das Kartesische Produkt die Paare (die Wiederholung der Mengenelemente am Rand dient nur zur Verdeutlichung der Anordnung)

| B ↓ | A → | 1 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | | (1,a) | (2,a) | (5,a) | (8,a) |
| C | | (1,C) | (2,C) | (5,C) | (8,C) |
| M | | (1,M) | (2,M) | (5,M) | (8,M) |
| x | | (1,x) | (2,x) | (5,x) | (8,x) |

Sind $A$ und $B$ endliche Mengen und ist mit $|A|$ die Mächtigkeit der Menge $A$ gemeint ( = die Anzahl der Elemente in $A$), so gilt:
$\left|A\times B\right| = \left|A\right| \cdot \left|B\right|$
So umfasst im Beispiel $A\times B$ 16 = 4·4 Paare.

**Definition**
Gegeben sind zwei Mengen $A$ und $B$. Dann ist eine Zuordnung oder Relation von $A$ nach $B$ eine Teilmenge des Kartesischen Produkts $A\times B$.

Anmerkung: Der Begriff der Zuordnung oder Relation ist sehr allgemein und zunächst mit keinerlei weiteren Eigenschaft verknüpft

Beispiele:
In dem Beispiel mit $A$ ={1, 2, 5, 8} und $B$ = {a, C, M, x} wäre
$Z_1$ = {(1,a) , (1,x) , (5,M) , (8,M)}
eine willkürliche Zuordnung von A nach B. Eine systematische Zuordnungsvorschrift ist nicht erkennbar.
$Z_2$ = {(1,x) , (2,M) , (5,C) , (8,a)}
ist eine andere Zuordnung. Hier ist eine Systematik in der Zuordnungsvorschrift erkennbar.

Für die Definition einer Zuordnung kann man prinzipiell zwei Methoden wählen. Wichtig ist, dass die Definition einen in die Lage versetzt, von einem vorliegenden Paar zu entscheiden, ob es zur Zuordnung ( = Menge von Paaren) gehört oder nicht.

### 1.1.1 Aufzählung aller (endlich vieler) Zuordnungspaare

Ist die Zuordnung als Menge von Paaren endlich, so kann man alle Paare, die zur Zuordnung gehören, aufzählen. Ist das der Fall, so bilden alle Elemente, die an erster Stelle in den Paaren vorkommen, die Definitionsmenge und alle Elemente, die an zweiter Stelle in den Paaren vorkommen, die Wertemenge.

Bei dieser Methode der Definition einer Zuordnung können die beiden wichtigen Mengen, die Definitions- und Wertemenge aus der Definition bestimmt werden.
Diese Art der Zuordnung bietet sich immer dann an, wenn die Zuordnung keiner Gesetzmäßigkeit unterliegt. Wenn man z.B. auflistet, welche Schüler einer Klasse wie viele und welche Mobiltelefone besitzen.
In dem oben dargestellten Beispiel mit $A$ ={1, 2, 5, 8} und $B$ = {a, C, M, x} und der Zuordnung $Z_1$ = {(1,a) , (1,x) , (5,M) , (8,M)} ist die Definitionsmenge für $Z_1$ {1, 5, 8} und die Wertemenge {a, x, M}. Bei $Z_2$ ist die Definitionsmenge ganz $A$ und die Wertemenge ganz $B$.

### 1.1.2 Beschreibung durch Definitionsmenge, Zielmenge und Zuordnungsvorschrift

Die in 2.1.1 erläuterte Definition einer Zuordnung ist natürlich nur möglich, wenn die Menge der Paare in der Zuordnung endlich und nicht zu groß ist. In der Mathematik hat man es aber sehr oft mit Zuordnungen zu tun, die eine unendliche Mächtigkeit haben. Dann muss man die Zuordnung durch eine Gesetzmäßigkeit beschreiben. Z.B. werden jedem Menschen seine Geschwister zugeordnet oder jeder Zahl das Quadrat. Durch solch eine Vorschrift allein ist die Zuordnung aber noch nicht vollständig definiert, da nicht festgelegt ist, auf welche Objekte die Zuordnungsvorschrift angewendet werden kann oder soll.
Beispiel: Zu jeder Zahl gibt es die Ergänzungszahl zum nächsten vollen Zehner. Diese Zahl zu kennen ist elementarstes Wissen für das Rechnen. Folglich üben Sie dieses mir Ihrer 1. Klasse, allerdings nur im Zahlraum bis 20. Das Zuordnungspaar (39,1) erfüllt zwar die Zuordnungsvorschrift, fällt aber nicht mehr in die Menge der relevanten Zuordnungspaare, da 39 nicht mehr in der Definitionsmenge liegt.
Sie müssen aber auch die Zielmenge festlegen, die Menge, in der die Elemente an der zweiten Stelle des Zuordnungspaares liegen dürfen.
Beispiel: Wenn Sie bei den Rechenübungen mit Ihrer 1. Klasse die Addition von 5 üben, so wird jeder Zahl $n$ (von 1 bis 20) die Zahl $n$+5 zugeordnet. Dann ist (17,22) zwar ein Zuordnungspaar, das der Zuordnungsvorschrift gehorcht, auch liegt die erste Zahl 17 im Definitionsbereich, aber die zweite, die zugeordnete Zahl ist nicht in der (begrenzt vorgegebenen) Zielmenge {1, 2, ..., 20}.
Formal sieht dann die vollständige Definition einer Zuordnung so aus: $z:\begin{cases} D \to Z \\ a \mapsto b \end{cases}$ Dabei ist „$z$“ der Name der Zuordnung, $D$ die vorgegebene Definitionsmenge, $Z$ die Zielmenge, in der die zugeordneten Elemente (2. Stelle im Paar) liegen müssen. Bei $a \mapsto b$ wird die Zuordnungsvorschrift für ein Beispielelement aus $D$ beschrieben.

Beispiel: $q:\begin{cases}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\\ n\mapsto n^2\end{cases}$ ist die Zuordnung der Quadratzahl zu jeder natürlichen Zahl.
Die obigen Beispiele zeigen aber auch, dass die Zielmenge mehr Elemente umfassen kann als die Wertemenge.

## 1.2 (Grafische) Darstellungen von Zuordnungen

Um den zentralen Begriff der Zuordnung oder Relation zu veranschaulichen und zu verstehen, gibt es verschiedene (grafische) Darstellungen.

### 1.2.1 Darstellung im Mengendiagramm

Beispiel
Anna ($A$), Berta ($B$), Christof ($C$) und Darius ($D$) besitzen Haustiere: Anna einen Hund, Berta eine Zwergwachtel, Christof eine Zwergwachtel und eine Gummiente und Darius eine Tarantel. Wir bezeichnen diese Zuordnung als $Z$.
Dann ist das zugehörige Mengendiagramm:

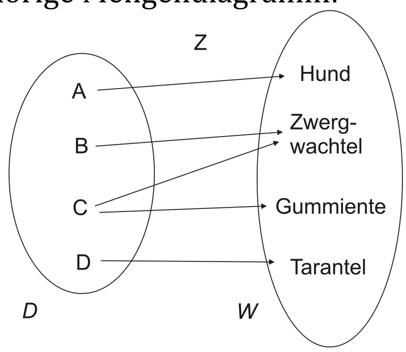



Abb. 1.1: Darstellung der Zuordnung Z im Mengendiagramm

Diese Darstellungsweise betont vor allem die beteiligten Mengen und den Zuordnungsaspekt, d.h. dass etwas vorgegeben wird und diesem dann etwas zugeordnet wird.

### 1.2.2 Markierung der Zuordnungspaare im Kartesischen Produkt

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) |
| (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) |
| (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) |
| (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) |
| (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) |
| (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) |

Abb. 1.2: Im Kartesischen Produkt wurden einige Elemente markiert.

Die Abbildung 1.2 zeigt das Kartesische Produkt von $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Paare, die zur Beispielzuordnung gehören, wurden mit einem roten Kringel markiert. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass man sehr schnell die Definitionsmenge (Spalten mit wenigstens einer Markierung) und die Wertemenge (Zeilen mit wenigstens einer Markierung) ablesen kann.
Die Zahlen in den Paaren sind gleichberechtigt, vor allem betont man nicht ein „zuerst“ und ein „dann“.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (-9; 9) | (-8; 9) | (-7; 9) | (-6; 9) | (-5; 9) | (-4; 9) | (-3; 9) | (-2; 9) | (-1; 9) | **( 0; 9)** | (1; 9) | (2; 9) | (3; 9) | (4; 9) | (5; 9) | (6; 9) | (7; 9) | (8; 9) | (9; 9) |
| (-9; 8) | (-8; 8) | (-7; 8) | (-6; 8) | (-5; 8) | (-4; 8) | (-3; 8) | (-2; 8) | (-1; 8) | **( 0; 8)** | (1; 8) | (2; 8) | (3; 8) | (4; 8) | (5; 8) | (6; 8) | (7; 8) | (8; 8) | (9; 8) |
| (-9; 7) | (-8; 7) | (-7; 7) | (-6; 7) | (-5; 7) | (-4; 7) | (-3; 7) | (-2; 7) | (-1; 7) | **( 0; 7)** | (1; 7) | (2; 7) | (3; 7) | (4; 7) | (5; 7) | (6; 7) | (7; 7) | (8; 7) | (9; 7) |
| (-9; 6) | (-8; 6) | (-7; 6) | (-6; 6) | (-5; 6) | (-4; 6) | (-3; 6) | (-2; 6) | (-1; 6) | **( 0; 6)** | (1; 6) | (2; 6) | (3; 6) | (4; 6) | (5; 6) | (6; 6) | (7; 6) | (8; 6) | (9; 6) |
| (-9; 5) | (-8; 5) | (-7; 5) | (-6; 5) | (-5; 5) | (-4; 5) | (-3; 5) | (-2; 5) | (-1; 5) | **( 0; 5)** | (1; 5) | (2; 5) | (3; 5) | (4; 5) | (5; 5) | (6; 5) | (7; 5) | (8; 5) | (9; 5) |
| (-9; 4) | (-8; 4) | (-7; 4) | (-6; 4) | (-5; 4) | (-4; 4) | (-3; 4) | (-2; 4) | (-1; 4) | **( 0; 4)** | (1; 4) | (2; 4) | (3; 4) | (4; 4) | (5; 4) | (6; 4) | (7; 4) | (8; 4) | (9; 4) |
| (-9; 3) | (-8; 3) | (-7; 3) | (-6; 3) | (-5; 3) | (-4; 3) | (-3; 3) | (-2; 3) | (-1; 3) | **( 0; 3)** | (1; 3) | (2; 3) | (3; 3) | (4; 3) | (5; 3) | (6; 3) | (7; 3) | (8; 3) | (9; 3) |
| (-9; 2) | (-8; 2) | (-7; 2) | (-6; 2) | (-5; 2) | (-4; 2) | (-3; 2) | (-2; 2) | (-1; 2) | **( 0; 2)** | (1; 2) | (2; 2) | (3; 2) | (4; 2) | (5; 2) | (6; 2) | (7; 2) | (8; 2) | (9; 2) |
| (-9; 1) | (-8; 1) | (-7; 1) | (-6; 1) | (-5; 1) | (-4; 1) | (-3; 1) | (-2; 1) | (-1; 1) | **( 0; 1)** | (1; 1) | (2; 1) | (3; 1) | (4; 1) | (5; 1) | (6; 1) | (7; 1) | (8; 1) | (9; 1) |
| **(-9; 0)** | **(-8; 0)** | **(-7; 0)** | **(-6; 0)** | **(-5; 0)** | **(-4; 0)** | **(-3; 0)** | **(-2; 0)** | **(-1; 0)** | **( 0; 0)** | **(1; 0)** | **(2; 0)** | **(3; 0)** | **(4; 0)** | **(5; 0)** | **(6; 0)** | **(7; 0)** | **(8; 0)** | **(9; 0)** |
| (-9;-1) | (-8;-1) | (-7;-1) | (-6;-1) | (-5;-1) | (-4;-1) | (-3;-1) | (-2;-1) | (-1;-1) | **( 0;-1)** | (1;-1) | (2;-1) | (3;-1) | (4;-1) | (5;-1) | (6;-1) | (7;-1) | (8;-1) | (9;-1) |
| (-9;-2) | (-8;-2) | (-7;-2) | (-6;-2) | (-5;-2) | (-4;-2) | (-3;-2) | (-2;-2) | (-1;-2) | **( 0;-2)** | (1;-2) | (2;-2) | (3;-2) | (4;-2) | (5;-2) | (6;-2) | (7;-2) | (8;-2) | (9;-2) |
| (-9;-3) | (-8;-3) | (-7;-3) | (-6;-3) | (-5;-3) | (-4;-3) | (-3;-3) | (-2;-3) | (-1;-3) | **( 0;-3)** | (1;-3) | (2;-3) | (3;-3) | (4;-3) | (5;-3) | (6;-3) | (7;-3) | (8;-3) | (9;-3) |
| (-9;-4) | (-8;-4) | (-7;-4) | (-6;-4) | (-5;-4) | (-4;-4) | (-3;-4) | (-2;-4) | (-1;-4) | **( 0;-4)** | (1;-4) | (2;-4) | (3;-4) | (4;-4) | (5;-4) | (6;-4) | (7;-4) | (8;-4) | (9;-4) |
| (-9;-5) | (-8;-5) | (-7;-5) | (-6;-5) | (-5;-5) | (-4;-5) | (-3;-5) | (-2;-5) | (-1;-5) | **( 0;-5)** | (1;-5) | (2;-5) | (3;-5) | (4;-5) | (5;-5) | (6;-5) | (7;-5) | (8;-5) | (9;-5) |
| (-9;-6) | (-8;-6) | (-7;-6) | (-6;-6) | (-5;-6) | (-4;-6) | (-3;-6) | (-2;-6) | (-1;-6) | **( 0;-6)** | (1;-6) | (2;-6) | (3;-6) | (4;-6) | (5;-6) | (6;-6) | (7;-6) | (8;-6) | (9;-6) |
| (-9;-7) | (-8;-7) | (-7;-7) | (-6;-7) | (-5;-7) | (-4;-7) | (-3;-7) | (-2;-7) | (-1;-7) | **( 0;-7)** | (1;-7) | (2;-7) | (3;-7) | (4;-7) | (5;-7) | (6;-7) | (7;-7) | (8;-7) | (9;-7) |
| (-9;-8) | (-8;-8) | (-7;-8) | (-6;-8) | (-5;-8) | (-4;-8) | (-3;-8) | (-2;-8) | (-1;-8) | **( 0;-8)** | (1;-8) | (2;-8) | (3;-8) | (4;-8) | (5;-8) | (6;-8) | (7;-8) | (8;-8) | (9;-8) |
| (-9;-9) | (-8;-9) | (-7;-9) | (-6;-9) | (-5;-9) | (-4;-9) | (-3;-9) | (-2;-9) | (-1;-9) | **( 0;-9)** | (1;-9) | (2;-9) | (3;-9) | (4;-9) | (5;-9) | (6;-9) | (7;-9) | (8;-9) | (9;-9) |

Abb. 1.3: Eine systematische Zuordnung im Kartesischen Produkt

Das Beispiel in Abbildung 1.3 ist zunächst nichts anderes als das in Abb. 1.2. Hier gibt es allerdings für die ausgewählten Zuordnungspaare eine mathematisch formulierbare Beziehung zwischen der ersten und der zweiten Zahl. Nennen wir die Paare allgemein $(x, y)$, so sind alle die Paare markiert, für die $x + y = 6$ gilt. Auch hier sind die erste und die zweite Zahl in den Zuordnungspaaren gleichberechtigt.
Da das Zahlenfeld schon etwas unübersichtlicher ist, wurden alle Paare mit einer Null in Fettschrift dargestellt.
Betonen wir in der Systematik, dass die erste Zahl $x$ vorgegeben wird und dazu passend das $y$ berechnet wird, so lösen wir günstiger Weise die Gleichung nach y auf: $y = 6 - x = -x + 6$. Das ist nun eine Zuordnungsvorschrift, wie sie in 1.1.2 erwähnt wurde. Dann können wir die in Abb. 1.3 dargestellte Zuordnung auch schreiben durch:

$$g:\begin{cases}\{-3,-2,...,8,9\} \to \{-9,-8,...,8,9\} \\ x \mapsto 6-x\end{cases}$$

In der ersten Menge muss tatsächlich die Definitionsmenge angegeben werden, die zweite Menge darf umfassender sein als die Wertemenge.
Man kann die Abbildung 1.3 aber auch so interpretieren, dass sich die gesamte Zuordnung auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ abspielen soll. Diese Menge kann nicht vollständig notiert werden, so dass man immer nur einen Ausschnitt darstellt, z.B. den in Abbildung 1.3 gewählten. Dann können die mit einem Kringel markierten Paare einige der Zuordnung *h* sein.

$$h:\begin{cases}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\\ x\mapsto 6-x\end{cases}$$

### 1.2.3 Auflistung in einer Wertetabelle

in Arbeit

### 1.2.4 Darstellung auf einer Doppelskala

in Arbeit

## 1.3 Funktionen als spezielle Zuordnungen

Zuordnungen können verschiedene Eigenschaften haben. Wir wollen hier eine herausstellen. Betont man den Zuordnungsbegriff, dass also den Elementen der Definitionsmenge Elemente der Wertemenge zugeordnet werden, so ist eine spezielle Eigenschaft, dass diese Zuordnung eindeutig ist.

Definition
Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, die jedem Element $x$ der Definitionsmenge $D$ *genau ein* Element der Wertemenge $W$ zuordnet.
Hat die Funktion z.B. den Namen $f$, so bezeichnet man das Element, das dem Element $x$ zugeordnet wird, mit $f(x)$.

In der grafischen Darstellung des Kartesischen Produkts ist eine Funktion dadurch erkennbar, dass in jeder senkrechten Spalte höchstens ein Element markiert ist. Das ist in Abb. 2.2 nicht der Fall, in Abb. 2.3 ist es erfüllt.

## 1.4 Verschiedene Funktionsaspekte

in Arbeit

## 1.5 Funktionsgraphen im Koordinatensystem

in Arbeit

# 2 Wichtige Funktionsklassen

Einmal durch die verschiedenen Beschreibungsformen, andererseits aber auch durch die Fülle an mathematischen Termen zur Definition einer Funktion teilt man Funktionen in Klassen ein. Dient ein algebraischer Term zur Definition, so erfolgt die Einteilung nach der „verwendeten Mathematik". Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen oder Wurzelfunktionen sind einige Beispiele dafür.

## 2.1 Lineare Funktionen

Bei linearen Funktionen kommt in der Funktionsgleichung die Variable $x$ in der ersten Potenz vor. Die Graphen von linearen Funktionen sind Geraden.

Def!

**Definition 2.1**
Unter einer **linearen Funktion** versteht man eine Funktion $f$ mit dem Definitionsbereich $D=\mathbb{R}$, deren Funktionsgleichung sich auf die Form $f(x)=mx+b$ bringen lässt; dabei heißt der Parameter $m$ die **Steigung** der Geraden und der Parameter $b$ der **y-Achsenabschnitt**. Man spricht hier auch von der **y-Achsenabschnittsform**.

**Bemerkung**
Unter einem **Parameter** versteht man eine Variable, die bei einer konkreten Anwendung als fest gewählt angesehen wird. Die Variable $x$ stellt ein beliebiges Element aus der Definitionsmenge $D$ dar. Um die zugeordnete Zahl $y$ zu berechnen, sind $m$ und $b$ für diese Betrachtung konstant. Weiterhin kann man aber fragen, wie sich eine Veränderung von $m$ oder b auf den Funktionsgraph auswirkt. Hat man diese Abhängigkeiten im Blick, spricht man bei $f(x)=mx+b$ von einer **Funktionenschar** mit den beiden **Scharparametern** $m$ und $b$.

### 2.1.1 Verschiedene Formen der linearen Funktion

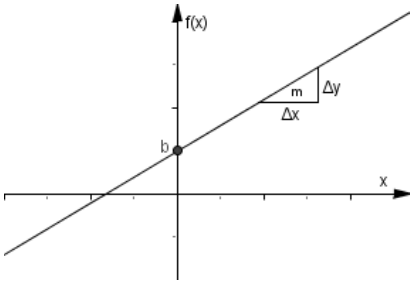
Die $y$-Achsenabschnittsform der Geraden ist in Abb. 2.1 a) skizziert. Die Steigung $m$ erhält man mittels eines Steigungsdreiecks als

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

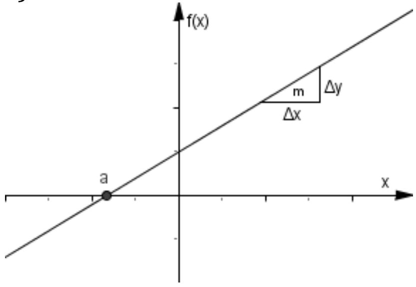
wobei $\Delta x$ der Abstand zweier $x$-Werte und $\Delta y$ der Abstand der zugehörigen Funktionswerte ist.

Neben der häufig anzutreffenden $y$-Achsenabschnittsform, für die man den y-Achsenabschnit und die Steigung kennen muss, kann man einer lineare Funktion auch über andere Eigenschaften charakterisieren. Diese fließen dann direkt in eine passende Darstellungsform ein.

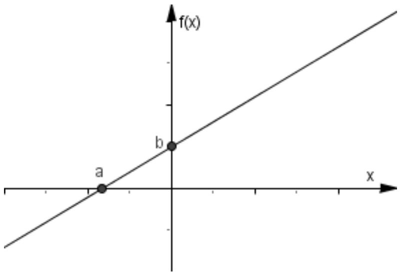
a) y-Achsenabschnittsform



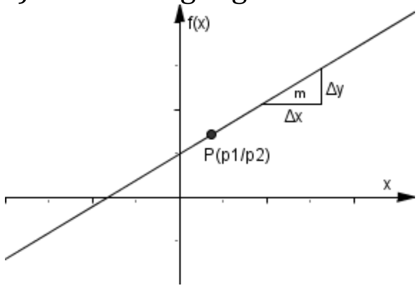

b) x-Achsenabschnittsform




c) Achsenabschnittsform




d) Punkt-Steigungsform




e) Zwei-Punkte-Form

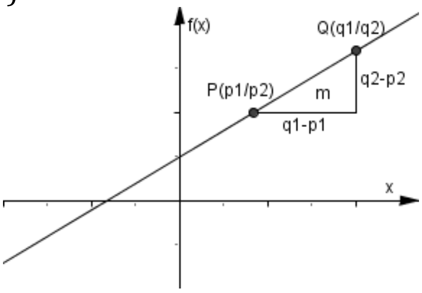



**Abb. 2.1:** Fünf Formen der Geradengleichung und die dabei auftretenden Parameter.

- ***x*-Achsenabschnittsform** (Abb. 2.1 b)): Gegeben sind die Steigung $m$ der Geraden und der Schnittpunkt $a$ mit der $x$-Achse. Dann ist die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion $y = m(x - a)$.

- **Achsenabschnittsform** (Abb. 2.1 c)): Gegeben sind die beiden Achsenabschnitte $a$ und $b$. Dann ist die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Die Achsenabschnittsform kann nur zur Beschreibung herangezogen werden, falls die Gerade nicht durch den Ursprung und nicht parallel zur $x$-Achse verläuft.

- **Punkt-Steigungsform** (Abb. 2.1 d)): Liegt der Punkt $P(p_1,p_2)$ auf einer Geraden mit der Steigung $m$, so lässt sich die Funktionsgleichung wie folgt bestimmen:

$$y - p_2 = m(x - p_1)$$

- **Zwei-Punkteform** (Abb. 2.1 e)): Sind $P(p_1,p_2)$ und $Q(q_1,q_2)$ zwei nicht identische Punkte der Geraden, so lässt sich die lineare Funktion durch

$$y - p_2 = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}(x - p_1)$$

beschreiben. Der Bruch $\frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$ ist die Berechnung der Steigung über den Differenzenquotienten.

## 2.2 Quadratische Funktionen

Funktionsgleichungen quadratischer Funktionen enthalten die Variable $x$ in der zweiten Potenz. Die Graphen von quadratischen Funktionen sind Parabeln.

Def!

**Definition 2.2**
Unter einer **quadratischen Funktion** versteht man eine Funktion $f$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, deren Funktionsgleichung sich auf die **Normalform** $f(x) = ax^2 + bx + c$ bringen lässt; dabei sind $a$, $b$ und $c$ reelle Parameter, $a \neq 0$, damit der quadratische Anteil nicht verschwindet.

Der Graph zur Funktionsgleichung $y = x^2$ heißt **Normalparabel.**

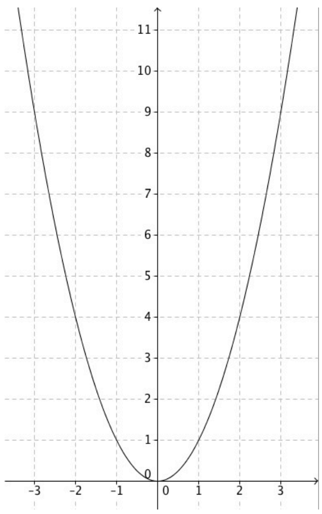



**Abb. 2.2:**
Die Normalparabel

**Scheitelpunktsform**
Neben der Normalform gibt es die sog. Scheitelpunktsform der Parabel, an der man insbesondere die Koordinaten des Scheitelpunktes leicht ablesen kann.

Sie hat die Form $y = a\left(x - x_s\right)^2 + y_s$

Dabei ist $a$ ein reeller Parameter und $x_s$ und $y_s$ sind die Koordinaten des Scheitelpunktes S.

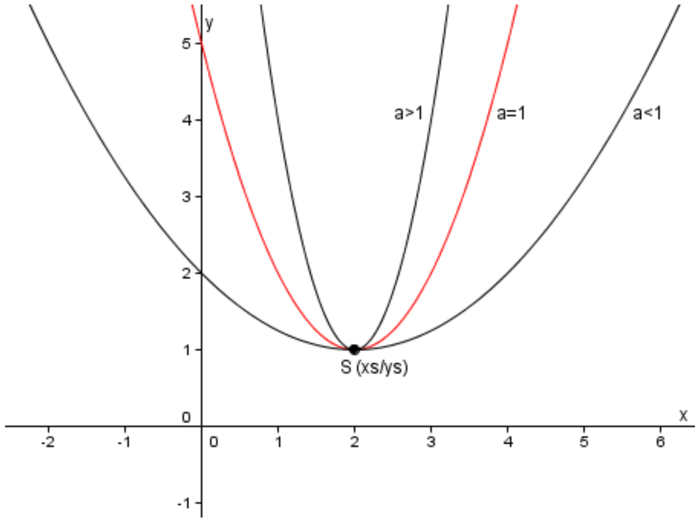



**Abb. 2.3:** Funktionsgraphen quadratischer Funktionen mit dem Scheitelpunkt S($x_s$/$y_s$) und einer Veränderung des Parameters $a$. Für $0 < a < 1$ wird die Normalparabel gestaucht, für $a > 1$ wird sie gestreckt.

Ist der Parameter $a$ negativ, so ist die Parabel nach unten geöffnet.

**Nullstellenform**

Die Nullstellen sind wesentliche, charakteristische Werte/Stellen für den Funktionsterm/Funktionsgraphen. Sind diese bekannt, so kann man die Gleichung der zugehörigen Funktion sofort aufstellen über

$$y = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Dabei ist $a$ ein reeller Parameter und $x_1$ und $x_2$ sind die Stellen, an denen der Funktionsgraph die $x$-Achse schneidet (Nullstellen).

Bsp.

**Beispiel**

Eine quadratische Funktion mit den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3{,}5$ hat die Funktionsgleichung

$y = a\left(x+1\right)\left(x-3{,}5\right) = a\left(x^2 - 2{,}5x - 3{,}5\right)$

Quadratische Funktionen können keine, eine oder zwei Nullstellen besitzen.

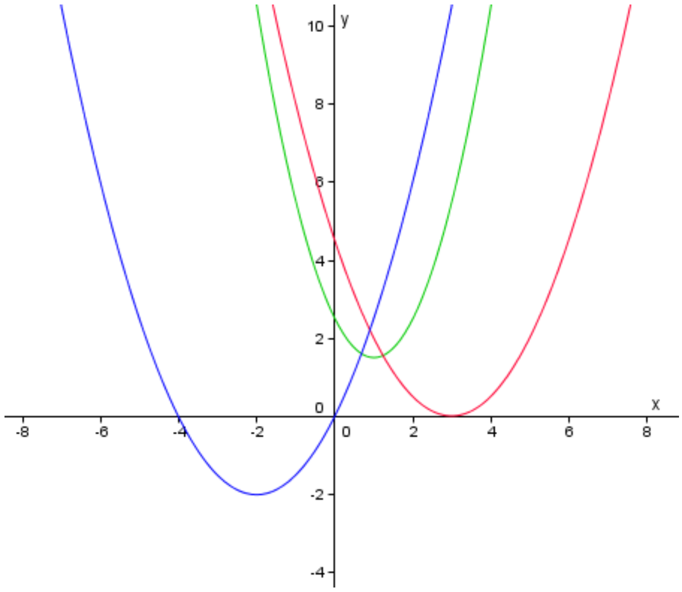



**Abb. 2.4:** Graphen quadratischer Funktionen mit keiner (grün), einer (rot) und zwei (blau) Nullstellen

## 2.3 Polynomfunktionen

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen linearen und quadratischen Funktionen sind Spezialfälle einer Klasse von Funktionen, deren Funktionsgleichungen Polynome mit reellen Koeffizienten sind.

**Definition 2.3:**
Für jede natürliche Zahl $n = 0,1,2,\dots$ heißt die Funktion $f$ mit der Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

**Polynomfunktion** oder **ganzrationale Funktion**. Die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sind reelle Zahlen (mit $a_n \neq 0$) und werden **Koeffizienten** genannt. Die Zahl $n$ ist der **Grad** der Polynomfunktion[1].

Die nachfolgende Abbildung zeigt zwei Beispiele für Graphen von Polynomfunktionen.

[1] Lineare Funktionen sind Polynomfunktionen ersten Grades, quadratische Funktionen Polynomfunktionen zweiten Grades.

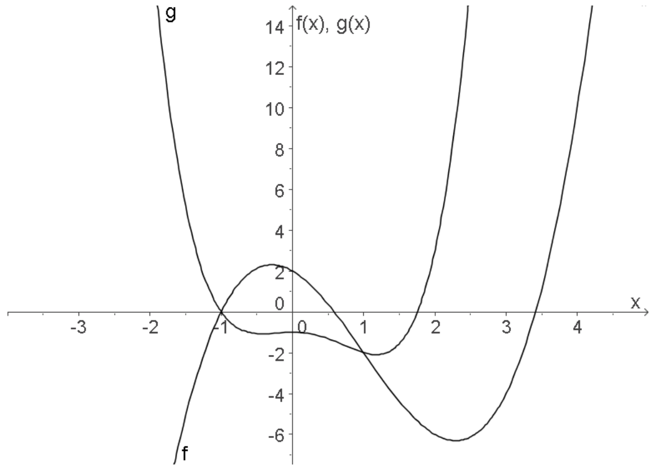



**Abb. 2.5:** Die Graphen der Funktionen $f$ mit $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$ und $g$ mit $y = x^4 - x^3 - x^2 - 1$.

**Eigenschaften von Polynomfunktionen**

Polynomfunktionen und ihre Graphen haben folgende Eigenschaften:

- Eine Polynomfunktion $n$-ten Grades hat höchstens $n$ Nullstellen.
- Grenzverhalten: Im Unendlichen, d. h. für $x \to \infty$ oder für $x \to -\infty$, wachsen die Funktionswerte ins Unendliche, oder sie gehen gegen „minus Unendlich“ : $y \to \pm\infty$. Konkret existiert für das Grenzverhalten einer Polynomfunktion die folgende einfache Regel, dass das Grenzverhalten nur vom führenden Summanden $a_n x^n$ bestimmt wird. Es lassen sich dann vier Fälle unterscheiden:

| | | |
|---|---|---|
| $n$ ist gerade | $a_n > 0$ | $y \to \infty$ für $x \to -\infty$<br>$y \to \infty$ für $x \to \infty$ |
| | $a_n < 0$ | $y \to -\infty$ für $x \to -\infty$<br>$y \to -\infty$ für $x \to \infty$ |
| $n$ ist ungerade | $a_n > 0$ | $y \to -\infty$ für $x \to -\infty$<br>$y \to \infty$ für $x \to \infty$ |
| | $a_n < 0$ | $y \to \infty$ für $x \to -\infty$<br>$y \to -\infty$ für $x \to \infty$ |

## 2.4 (Gebrochen-)Rationale Funktionen

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle die gebrochen-rationalen Funktionen kurz aufgeführt. Es handelt sich bei den Funktionsgleichungen, vereinfacht gesagt, um Brüche, in deren Zähler und Nenner Polynomfunktionen stehen. Die genaue Definition ist folgende:

**Definition 2.4**
Eine Funktion $f$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x + b_0}$$

(alle Koeffizienten reell mit $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$ und $m \geq 1$) heißt **gebrochen-rational** oder nur **rational**.

Gebrochen-rationale Funktionen können als neues Element sogenannte **Polstellen** enthalten. Es handelt sich dabei um Stellen, an denen die Funktion nicht definiert ist, und an denen die Funktionswerte gegen Unendlich oder minus Unendlich gehen.

**Beispiel:**
Wir betrachten die Funktion $f$ mit der Gleichung $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$. Die Definitionslücken (und Polstellen) liegen bei $x=2$ und $x=-2$, da an diesen Stellen der Nenner Null wird. Abbildung 2.6 zeigt den Funktionsgraphen.

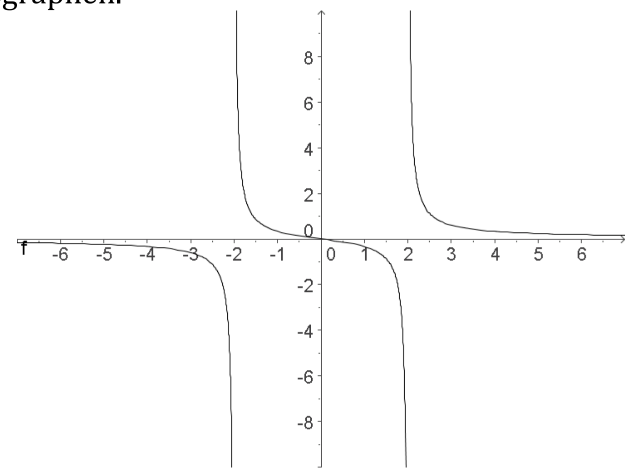



**Abb. 2.6:** Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

Gebrochen-rationale Funktionen können Symmetrieeigenschaften aufweisen, auf die wir in Kapitel 4 zu sprechen kommen.

## 2.5 Trigonometrische Funktionen

Abbildung 2.7 zeigt als Beispiel die Funktion mit der Gleichung $y=\cos x$[2]. Wir lösen uns hier von der geometrischen Bedeutung des Kosinus (und der anderen beiden trigonometrischen Funktio-

[2] Die Argumente der trigonometrischen Funktionen können – falls die Schreibweise eindeutig ist – auch ohne Klammern geschrieben werden, zum Beispiel $\cos(x) \equiv \cos x$.

nen sin und tan) und erweitern die Definitionsmenge auf $\mathbb{R}$, die reellen Zahlen; der Wertebereich ist das Intervall $[-1;1]$.

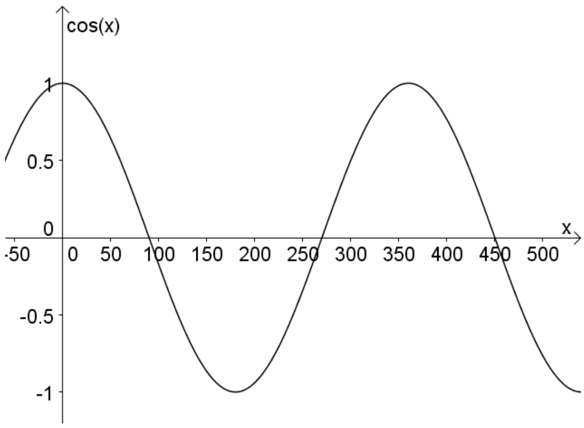



**Abb. 2.7:** Der Graph zur Funktionsgleichung *y* = cos(*x*).

Die Tangensfunktion ist, neben der geometrischen Definition im rechtwinkligen Dreieck, definiert als

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Die Tangensfunktion ist in Abb. 2.8 dargestellt. Sie hat Polstellen (und entsprechend Definitionslücken) dort, wo die Kosinusfunktion Nullstellen hat, also bei $x = \pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, \ldots$ Ihre Nullstellen sind dort, wo die Sinusfunktion Nullstellen hat, also bei $x = 0°, \pm 180°, \pm 360, \ldots$ Der Wertebereich der Tangensfunktion ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

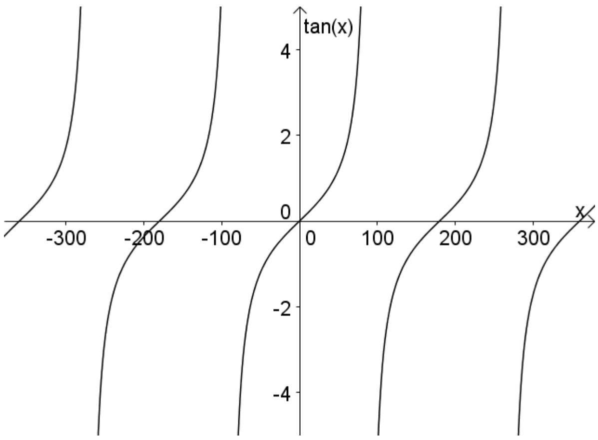



**Abb. 2.8:** Der Graph zur Funktionsgleichung $y = \tan x$.

Die trigonometrischen Funktionen sind **periodisch**, d. h. sie haben in gleichmäßigen Abständen jeweils dieselben Funktionswerte.

## 2.6 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen bei denen die Variable $x$ im Exponenten steht. Ein einfaches Beispiel ist die Funktion $f(x) = 2^x$ (siehe Abb. 2.9).

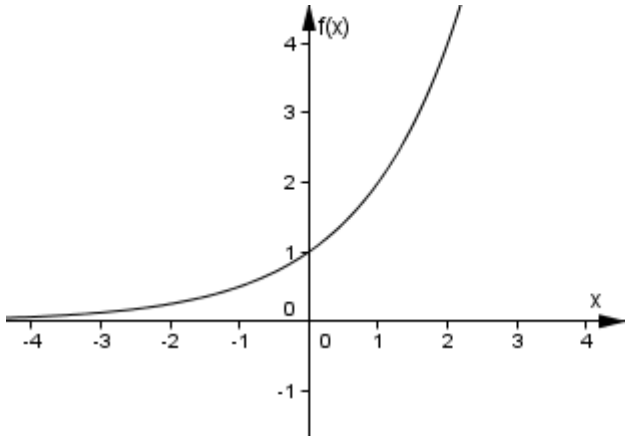



**Abb. 2.9:** Graph der Funktion $f(x) = 2^x$

**Definition 2.5**

Def!

Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ und der Funktionsgleichung $y = c \cdot a^x,\, c \in \mathbb{R},\, a > 0$, nennt man *Exponentialfunktionen zur Basis a*.

Ein Vorgang, der durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann, wird exponentielles Wachstum (für $a > 1$) bzw. exponentieller Zerfall (für $a < 1$) genannt.

**Eigenschaften von Exponentialfunktionen**

- Für $c > 0$ ist $y > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; die Graphen verlaufen stets oberhalb der $x$-Achse.
- Die Graphen haben keine Extrema. Sie weisen auch keine Symmetrieeigenschaften auf.
- Für $a < 1$ nähert sich der Funktionsgraph der $x$-Achse an, wenn $x \to \infty$ strebt; für $x \to -\infty$ wachsen die Funktionswerte ins Unendliche $(y \to \infty)$.
- Für $a > 1$ ist es umgekehrt.

Da jeder Funktionswert bei der Exponentialfunktion genau einmal vorkommt, können wir auch diese Funktion umkehren. Wir vertauschen die Variablen und wollen wieder nach $y$ auflösen:

$$x = c \cdot a^y$$

Um den Ausdruck nach *y* aufzulösen, müssen wir eine neue Funktion definieren, die **Logarithmusfunktion**.
Wir schreiben im einfachsten Fall für *c* = 1

$$x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(x) = y$$

und sprechen „Logarithmus von *x* zur Basis a".

Dann ergibt sich für unsere ursprüngliche Gleichung

$$x = c \cdot a^y \quad |:c$$

$$\frac{x}{c} = a^y \quad |\ \log$$

$$\log_a \frac{x}{c} = y$$

Die nach unten gesetzte Zahl (Basis) gibt an, zu welcher Exponentialfunktion der jeweilige Logarithmus die Umkehrfunktion ist.
Abbildung 2.10 zeigt zur Funktionsgleichung $y = e^x$ den Graphen der Umkehrfunktion, *y* = ln *x.*

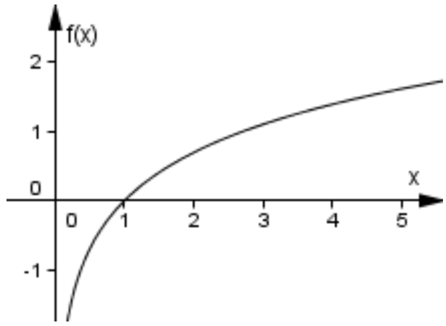



**Abb. 2.10:** Graph zur Funktionsgleichung *y* = ln *x*

Einen Logarithmus $y = \log_a(x)$ erklärt man sich am besten durch die Frage: *a* hoch wie viel ist gleich *x*, also $a^y = x$ . Will man nun den Logarithmus numerisch berechnen, so muss man auf die mit dem Taschenrechner vorgegebenen Logarithmen zurückgreifen. Das sind der Logarithmus zur Basis 10, abgekürzt durch „lg" oder „log" ohne Index, und zur Basis *e*, abgekürzt durch „ln".

## 2.7 Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Zuordnungsbeispielen

in Arbeit