Übungen zum Plenum Di, 9.4.13

Erkunden der mathematischen Strukturen von Zahlenfolgen

Gegeben ist die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch die ersten k Beispielzahlen. Die Aufgabe ist, für die Zahlenfolge eine mathematische Gesetzmäßigkeit zu finden.

Beispiel: $a_n = 2n^2 - n$

a) Berechnen Sie a_1 bis a_6.

Ergebnis: $a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_3 = 15,\ a_4 = 28,\ a_5 = 45,\ a_6 = 66$
Gegeben ist nun die Zahlenfolge über die Beispielzahlen 1, 6, 15, 28, 45, 66.

Für das Auffinden einer expliziten Formel kann man folgendermaßen vorgehen:
Man bildet fortgesetzt die Differenzen(folge).

Ausgangsfolge	1		6		15		28		45		66
1. Differenzenf.		5		9		13		17		21	
2. Differenzenf.			4		4		4		4		

Da die 2. Differenzenfolge konstant ist, ist die 1. Differenzenfolge eine arithmetische (= lineare) Folge.

b) Geben Sie für die 1. Differenzenfolge das Bildungsgesetz an (rekursiv und explizit)

Gesetzmäßigkeit:
Ist die 1. Differenzenfolge linear (arithmetisch), so hat die Ausgangsfolge ein quadratisches, explizites Bildungsgesetz.

Also kann man für die Ausgangsfolge den Ansatz machen: $a_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$
Die konkrete Aufgabe ist nun, die Unbekannten c_2, c_1 und c_0 zu bestimmen.

$$a_1 = c_2 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_0 = 1$$

Ansatz: $$a_2 = c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_0 = 6$$

$$a_3 = c_2 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_0 = 15$$

Da man drei Unbekannte bestimmen soll, genügen drei Gleichungen.
Das ist ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen für drei Unbekannte.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

Die Lösungen sind, da wir sie ja zu Beginn hineingesteckt hatten, c_2 = 2, c_1 = -1 und c_0 = 0.

Weiteres Beispiel und Verallgemeinerung

$a_n = n^3 + n - 2$

liefert als erste Zahlen der Zahlenfolge: $a_1 = 0,\ a_2 = 8,\ a_3 = 28,\ a_4 = 66,\ a_5 = 128$

Ausgangsfolge	0		8		28		66		128
1. Differenzenf.		8		20		38		62	
2. Differenzenf.			12		18		24		
3. Differenzenf.				6		6			

Hier müssen wir also bis zur 3. Differenzenfolge rechnen, um auf eine konstante Zahlenfolge zu kommen.

Allgemein gilt:

a) **Hat eine Zahlenfolge ein polynomiales, explizites Bildungsgesetz, so führt die fortgesetzte Differenzenbildung letztlich auf eine konstante Zahlenfolge.**

b) **Ist die *k*-te Differenzenfolge konstant, so hat die Zahlenfolge ein polynomiales, explizites Bildungsgesetz vom Grad *k*.**

Folgerung: Sind von einer beliebigen Zahlenfolge nur die ersten b Beispielzahlen gegeben, so gibt es einen polynomialen Ansatz vom Grad b-1 für ein explizites Bildungsgesetz, dem die gegebenen b Zahlen genügen.
Begründung: Der polynomiale Ansatz lautet $a_n = c_{b-1}n^{b-1} + c_{b-2}n^{b-2} + ... + c_2n^2 + c_1n + c_0$. Hier hat man b unbekannte Koeffizienten c_{b-1} bis c_0, für die man gerade b Gleichungen aufstellen kann, um sie zu bestimmen.

Dann ergibt sich die Frage, mit welcher Systematik man geometrische Zahlenfolgen oder - etwas allgemeiner - Zahlenfolgen mit einem (möglicherweise leicht verfremdeten) exponentiellen Gesetz erkennt.
Beispiel:

$a_n = 2^n$

liefert als erste Zahlen der Zahlenfolge: $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16,\ a_5 = 32,\ a_6 = 64$

Ausgangsfolge	2		4		8		16		32		64
1. Differenzenf.		2		4		8		16		32	

Man erkennt, dass hier die Differenzenfolge mit der Ausgangsfolge übereinstimmt.

Gesetzmäßigkeit:
Ist die Differenzenfolge die Ausgangsfolge, ggfs. multipliziert mit einem konstanten Faktor, so liegt der Ausgangsfolge ein exponentielles Bildungsgesetz zu Grunde.

Beispiel:

$a_n = 3^n$ liefert als erste Zahlen der Zahlenfolge:

$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 27,\ a_4 = 81,\ a_5 = 243,\ a_6 = 729$

Ausgangsfolge	3		9		27		81		243		729
1. Differenzenf.		6		18		54		162		486	
		=2·3		=2·9		=2·27		=2·81		=2·243	

2. Beispiel

Fibonaccifolge	1		1		2		3		5		8		13
1. Differenzenf.		0		1		1		2		3		5	

Die Differenzenfolge der Fibonacci-Folge ist also wieder die (um eine Position verschobene) Fibonacci-Folge. Das explizite Bildungsgesetz ist also von exponentieller Charakteristik, nämlich die Formel von Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Insbesondere in der Näherungsformel wird der exponentielle Charakter deutlich.

Weitere Übungsaufgaben

1. Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind bekannt: $a_5 = 18$ und $a_9 = 34$.
   Wie lautet das Bildungsgesetz?
2. „Für alle arithmetischen Folgen gilt: Jedes Folgenelement (ungleich a_1) ist der arithmetische Mittelwert der beiden Nachbarelemente“
   a. Formulieren Sie diese Aussage formal in einer Gleichung.
   b. Beweisen Sie diese Aussage auf der Basis der rekursiven Definition einer arithmetischen Folge.
   c. *(Die besondere Anforderung)*
   Beweisen Sie diese Aussage mit vollständiger Induktion.