8 Der Inkreis des Arbelos

Im Kapitel 7 hatten wir den Arbelos durch eine Gerade in zwei Teile geteilt und zu jedem den Inkreis konstruiert. Nun wollen wir den gesamten Arbelos nehmen und zu diesem den Inkreis konstruieren. Das Problem ist etwas schwieriger zu lösen, folgt aber im Wesentlichen dem gleichen Muster wie die Konstruktion der Zwillinge.

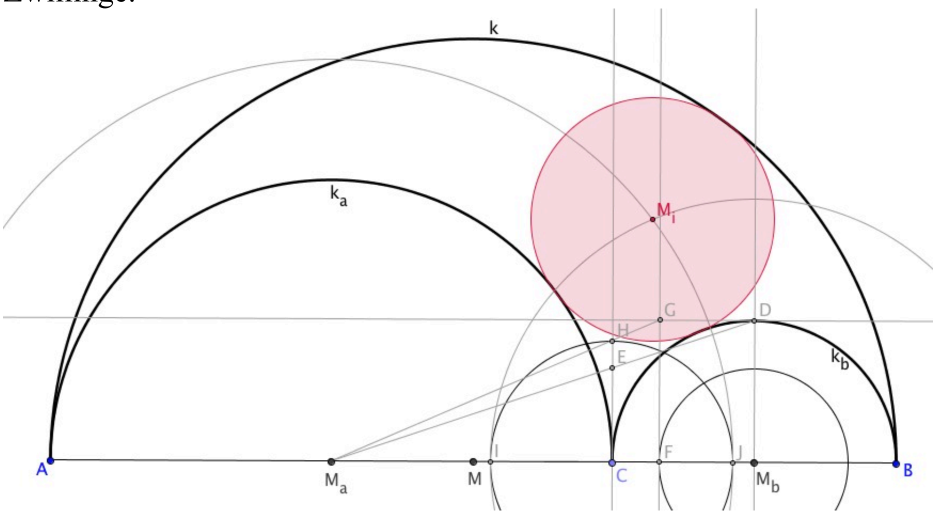

Abbildung 8.1: Die Konstruktion des Inkreises

Abbildung 8.1 zeigt den Inkreis. Er berührt alle drei Halbkreise, die den Arbelos begrenzen. Folglich liegt sein Mittelpunkt M_i auf dem gemeinsamen Schnittpunkt der folgenden drei Kreise (dabei nennen wir den noch zu bestimmenden Radius des Inkreises r):

- der Kreis um M_a mit dem Radius $a + r$
- der Kreis um M_b mit dem Radius $b + r$
- der Kreis um M mit dem Radius $a + b – r$
  (dieser Kreis ist in Abbildung 8.1. nicht gezeichnet)

Zu jedem der drei Kreise können wir einen Ansatz mit dem Höhensatz machen. Dazu fällen wir von M_i das Lot auf die Grundlinie $\overline{AB}$ und erhalten den Fußpunkt P. Dieses Lot hat die Länge h, die Entfernung von P zu C sei s.

1. Ansatz mit dem Kreis um M_a mit dem Radius $a + r$

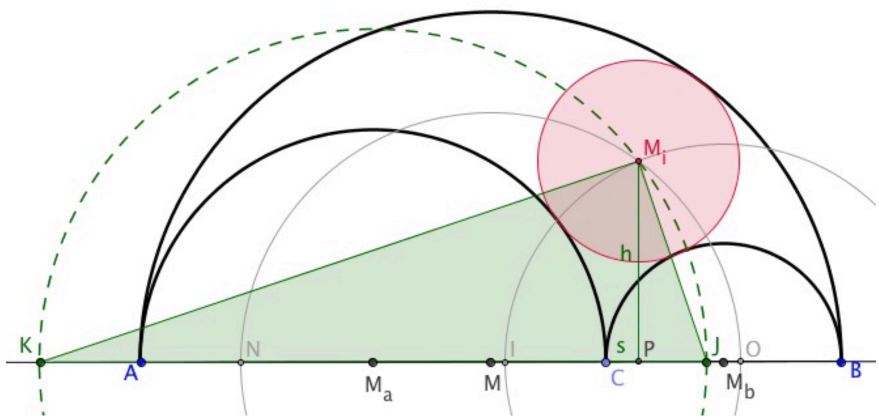

Abbildung 8.2

Der Kreis definiert das rechtwinklige Dreieck KJM_i, in dem nach dem Höhensatz gilt:

$$|KP| \cdot |PJ| = |PM_i|^2$$

$$(r+2a+s)\cdot(r-s)=h^2 \quad (1)$$

2. Ansatz mit dem Kreis um M_b mit dem Radius $b + r$

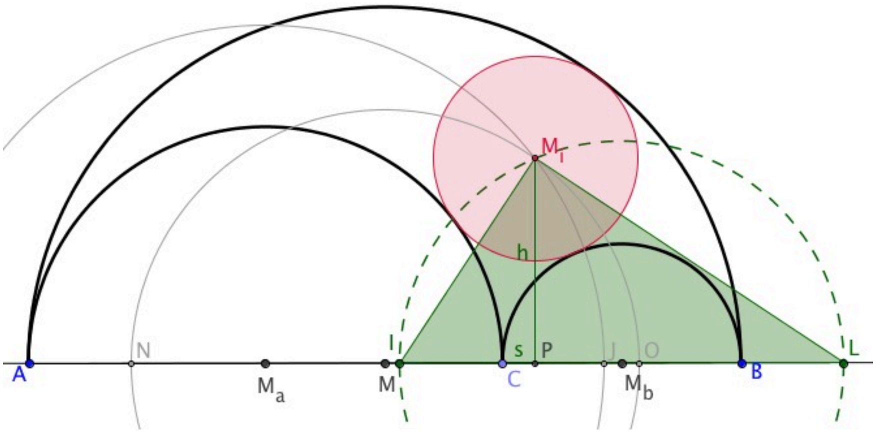

Abbildung 8.3

Der Kreis definiert das rechtwinklige Dreieck ILM_i, in dem nach dem Höhensatz gilt:

$$|IP| \cdot |PL| = |PM_i|^2$$

$$(r+s)\cdot(2b-s+r)=h^2 \quad (2)$$

3. Ansatz mit dem Kreis um M mit dem Radius $a + b - r$

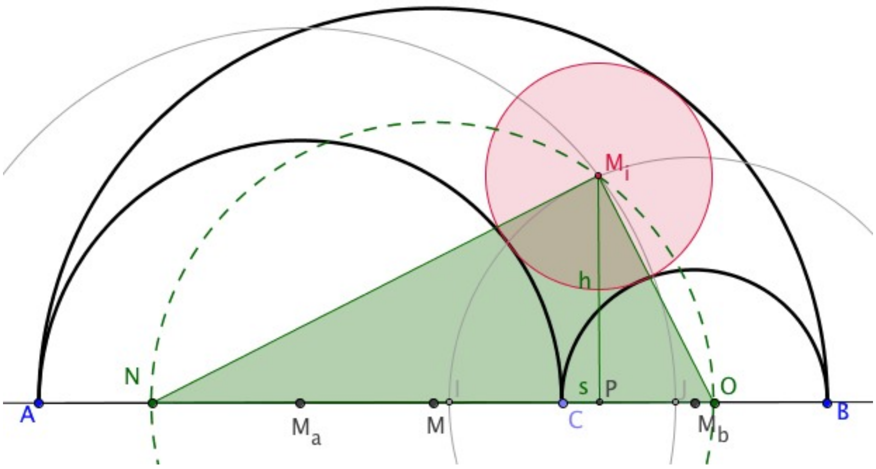

Abbildung 8.4

Der Kreis definiert das rechtwinklige Dreieck NOM_i, in dem nach dem Höhensatz gilt:

$$|NP| \cdot |PO| = |PM_i|^2$$

$$(s+2a-r)\cdot(2b-s-r)=h^2 \quad (3)$$

Mit den Gleichungen (1), (2) und (3) haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten h, s und r. Wir elimilieren h und s und lösen dann die verbleibende Gleichung nach r auf.
Auflösen der Klammern auf der linken Seite:

(1) $r^2+2ar+rs-rs-2as-s^2=h^2$

(2) $2br-rs+r^2+2bs-s^2+rs=h^2$

(3) $2bs+4ab-2br-s^2-2as+rs-rs-2ar+r^2=h^2$

h wird eliminiert, indem die linken Seiten gleich gesetzt werden:

(1)=(2) $r^2+2ar-2as-s^2=2br+r^2+2bs-s^2$

(1)=(3) $r^2+2ar-2as-s^2=2bs+4ab-2br-s^2-2as-2ar+r^2$

Die entstandenen Gleichungen können vereinfacht werden.

$$ar-as=br+bs$$

$$ar=bs+2ab-br-ar$$

In beiden Gleichungen werden nun die Terme mit s nach links geordnet.

$$\left(b+a\right)s=-br+ar$$

$$bs=br+2ar-2ab$$

Um die linken Seiten anzugleichen, wird die obere Gleichung mit b, die untere mit (a+b) multipliziert. Die rechten Seiten können dann gleich gesetzt werden:

$$\left(ar-br\right)b=\left(2ar+br-2ab\right)\left(a+b\right)$$

Diese Gleichung wird nach r aufgelöst.

$$abr-b^2r=\left(2a+b\right)\left(a+b\right)r-2ab\left(a+b\right)$$

$$\left(ab-b^2-2a^2-2ab-ab-b^2\right)r=-2ab\left(a+b\right)$$

$$\left(-2a^2-2ab-2b^2\right)r=-2ab\left(a+b\right)$$

$$r=\frac{ab\left(a+b\right)}{a^2+ab+b^2}$$

Das rechnerisch gewonnene Ergebnis für r soll nun wieder in eine geometrische Konstruktion übersetzt werden. Dazu nehmen wir noch ein paar Umformungen vor.

$$r=\frac{ab\left(a+b\right)}{a^2+ab+b^2}=\frac{ab\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^2-ab}=\frac{ab}{\left(a+b\right)-\frac{ab}{\left(a+b\right)}}$$

Hier erinnern wir uns aus dem Kapitel 7, dass $\rho=\frac{ab}{a+b}$ war und dieser Term unten rechts auftaucht. Also erhalten wir:

$$r=\frac{ab}{a+b-\rho}$$

Hiermit lässt sich r im Arbelos recht elegant konstruieren.

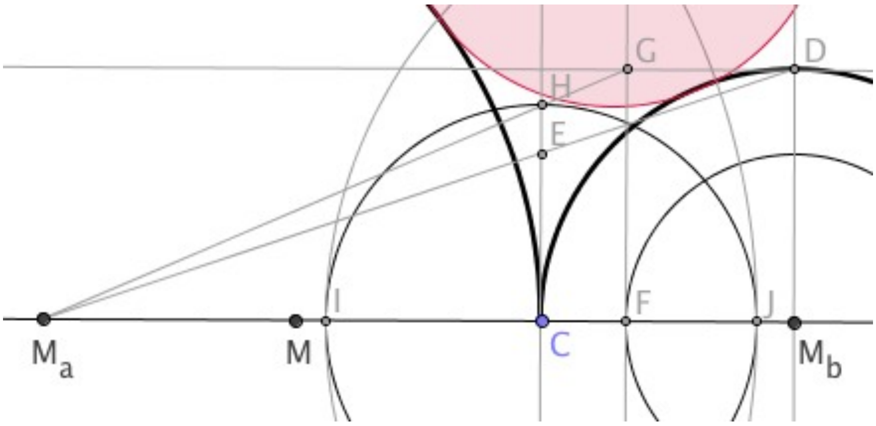

Abbildung 8.5: Die Konstruktion von *r*

Abbildung 8.5 ist eine Ausschnittsvergrößerung der Abbildung 8.1 und hebt den Teil hervor, in dem *r* konstruiert wird.
Durch M_b wird eine Senkrechte zur Basislinie AB gezeichnet, die den Kreisbogen k_b in D schneidet. Die Strecke $\overline{M_aD}$ schneidet die Senkrechte durch C in E. Damit ist $|CE| = \rho$, das war die in Kapitel 7 erarbeitete Konstruktion. Um M_b wird ein Kreis mit $|CE| = \rho$ geschlagen, der Schnittpunkt mit der Strecke $\overline{M_aM_b}$ ist F.
Da $|M_aM_b| = a+b$, ist $|M_aF| = a+b-\rho$. Letzteres ist der Nenner in unserer angestrebten Rechnung für *r*.
Die Senkrechte zur Basislinie durch F und die Parallele zur Basislinie durch D schneiden sich in G. Damit ist der Radius *b* auf die Strecke $\overline{FG}$ übertragen. Die Verbindung von G mit M_a schneidet die Senkrechte durch C in H. $|CH|$ ist der gesuchte Radius *r*, denn nach dem 2. Strahlensatz (Zentrum M_a) gilt:

$$\frac{|CH|}{|FG|} = \frac{|M_aC|}{|M_aF|} \text{, also } \frac{|CH|}{b} = \frac{a}{a+b-\rho} \text{ und damit } |CH| = \frac{ab}{a+b-\rho} = r.$$

Nun schlägt man um C einen Kreis mit dem Radius $|CH| = r$ und erhält die Schnittpunkte I und J mit der Basislinie. Damit lassen sich sofort die Kreise um M_a mit $a+r$ und um M_b mit $b+r$ zeichnen. Deren Schnitt liefert den Mittelpunkt M_i des Inkreises, womit die Konstruktion abgeschlossen ist, da nun der Inkreis gezeichnet werden kann.

Die Konstruktion des Inkreises des Arbelos ist ein Problem, das alle herausfordert, die sich mit dem Arbelos näher befassen. Letztlich ist es ein Spezialfall des alten Problems von Apollonius: Gegeben sind drei Kreise. Konstruiere die Kreise, die alle drei gegebenen Kreise berühren. Für dieses Problem gibt es eine klassische Lösung von Apollonius, später wurde das Problem recht elegant mit der sogenannten Inversion (am Kreis) gelöst.
Mit Hilfe der Inversion kann man auch den Inkreis des Arbelos konstruieren. Die Konstruktion umfasst viele Schritte, sie ist aber, wenn man mit der Inversion vertraut ist, naheliegend und „geradeaus“.

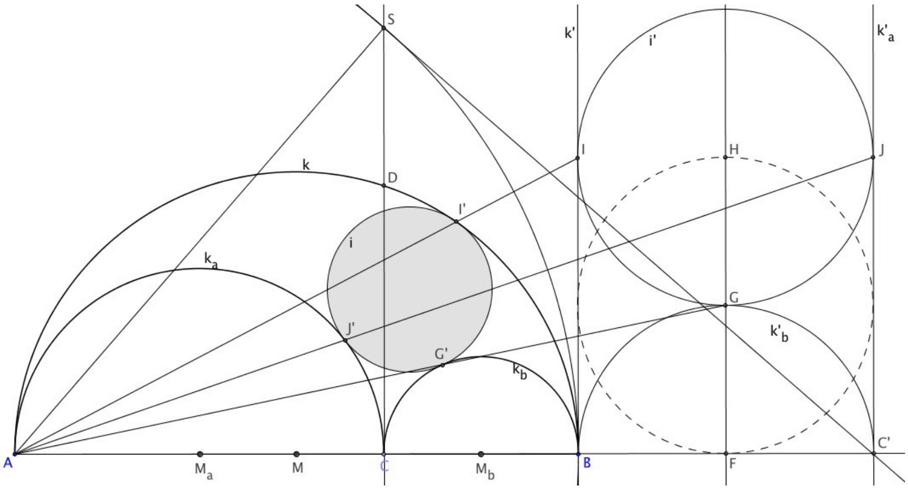

Abbildung 8.6: Die Konstruktion mit über die Inversion am Kreis

Kurze Erläuterung: Der Kreis für die Inversion ist der Kreis um A mit dem Radius $\left|AB\right|$. C' ist dann das Bild von C, k'_b, k' und k'_a die Bilder der Kreisbögen des Arbelos. Dann lässt sich i' als berührender Kreis an k'_b, k' und k'_a leicht zeichnen. Die Berührpunkte sind G, I und J. Diese werden zurückabgebildet auf G', I' und J', welche die Berührpunkte des gesuchten Inkreises mit den gegebenen Bögen des Arbelos sind.

Die nachfolgende Konstruktion stammt von Leon Bankoff (1908 – 1997), der hauptberuflich Zahnarzt war, sich aber nebenbei mit Geometrie, speziell dem Arbelos, beschäftigte und dort ein anerkannter Spezialist war.

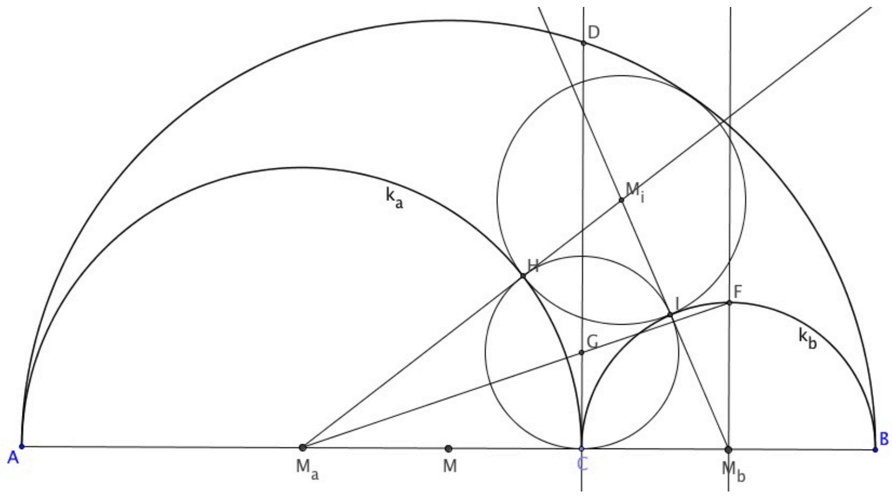

Abbildung 8.7: Die Konstruktion des Inkreises nach Bankoff

Die Konstruktion ist kurz und elegant, allerdings schwer zu begründen. Man konstruiert den Radius der Archimedischen Zwillinge (Punkte F und G, siehe Kapitel 7). Um G schlägt man den Kreis mit $\left|CG\right|$, der die Kreisbögen k_a und k_b in H und I schneidet. Diese beiden Punkte sind die Berührpunkte des gesuchten Inkreises mit k_a und k_b. Folglich schneiden sich die Strahlen M_aH und M_bI im Mittelpunkt M_i des Inkreises.

Eine weitere Konstruktion stammt von dem Geometrieprofessor Paul Yiu, Florida Atlantic University.

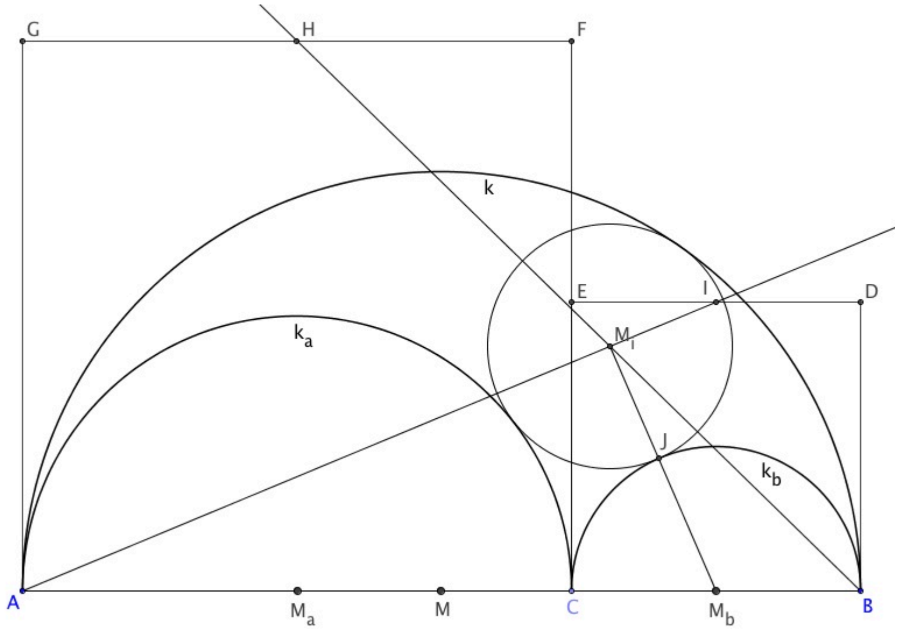

Abbildung 8.7: Die Konstruktion des Inkreises nach Paul Yiu

Auch hier ist die kurze, elegante Konstruktion schwer zu begründen. Das wesentliche Element der Konstruktion von Yiu sind die Quadrate ACFG und CBDE über den Halbkreisdurchmessern. Die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten sind H und I. Die Geraden AI und BH schneiden sich im Inkreismittelpunkt M_i. Den Radius des Inkreises erhält man dann durch den Schnittpunkt von M_iM_b mit k_b.