auf sich selbst abgebildet und die Gerade CM_a auf die Gerade EM_a = EF. Dabei bleibt die Tangenteneigenschaft erhalten. Also ist EF Tangente an k_a. ■
Ganz analog beweist man, dass EF auch Tangente an k_b ist mit dem Berührpunkt F.

7 Die Zwillinge des Archimedes

Die Höhe teilt den Arbelos in zwei Teile. Beide sind begrenzt von zwei Kreisbögen und einer Strecke. Wie einem von Strecken begrenzten Dreieck kann man auch diesen Figuren je einen Kreis einbeschreiben, der jeweils die drei Begrenzungslinien berührt.

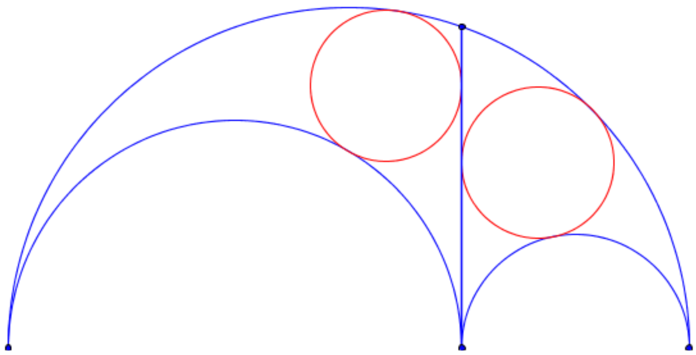


Abbildung 7.1: Die beiden Zwillinge in den beiden Teilen des Arbelos

In diesem Kapitel geht es um diese beiden Kreise und darum, wie man sie mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

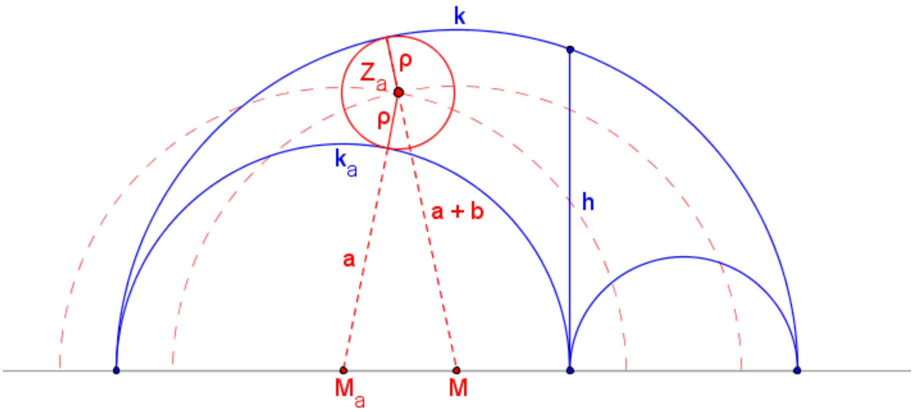


Abbildung 7.2: Ein Kreis, der k_a und k berührt, nicht aber h

Hier ist zunächst einmal um M_a ein zu k_a konzentrischer Kreis mit dem Radius $a+\rho$ (ρ - sprich rho – was eine übliche Bezeichnung für den Radius des Inkreises ist) gelegt worden. Jeder Punkt dieses Kreises hat zum Halbkreis k_a den Abstand ρ. Dann ist um M ein Kreis mit dem Radius $a+b-\rho$ beschrieben worden. Der Schnittpunkt Z_a der beiden Kreise hat also zu den Halbkreisen k_a und k den gleichen Abstand ρ. Der rote Kreis um den Punkt Z_a hat den Radius ρ, berührt also die beiden Halbkreise k_a und k. Wenn man den Radius ρ größer macht, wandert der rote Kreis stetig auf die Höhe h zu, bis er auch diese berührt. Das zeigt Abbildung 7.3.

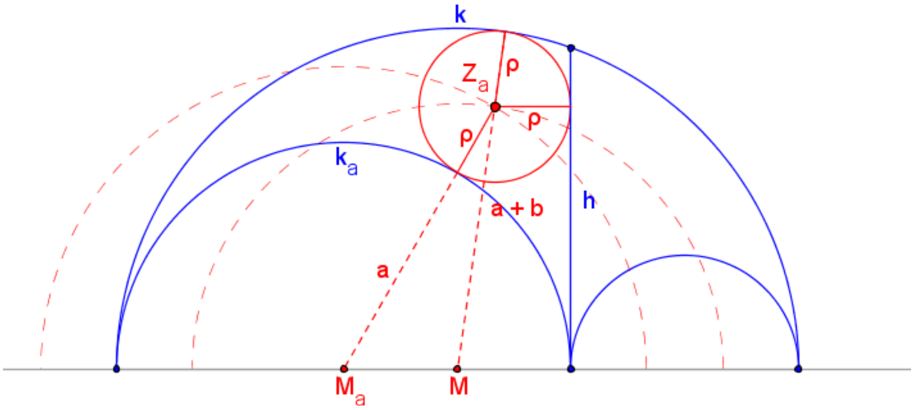


Abbildung 7.3: Der Kreis um Z_a berührt alle drei Begrenzungslinien

Ebenso hat auch die rechte Seite des Arbelos einen Inkreis.

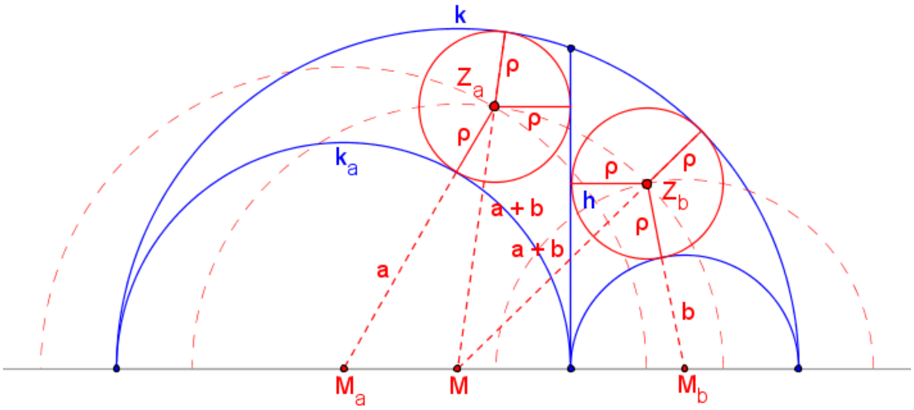


Abbildung 7.4

Diese beiden Kreise nennt man die Zwillinge des Archimedes. Zwillinge deshalb, weil sie gleich groß sind.

Für die Konstruktion der Zwillinge bestimmen wir zunächst den Radius rechnerisch. Das Ergebnis der Rechnung setzen wir anschließend in eine Konstruktion um.

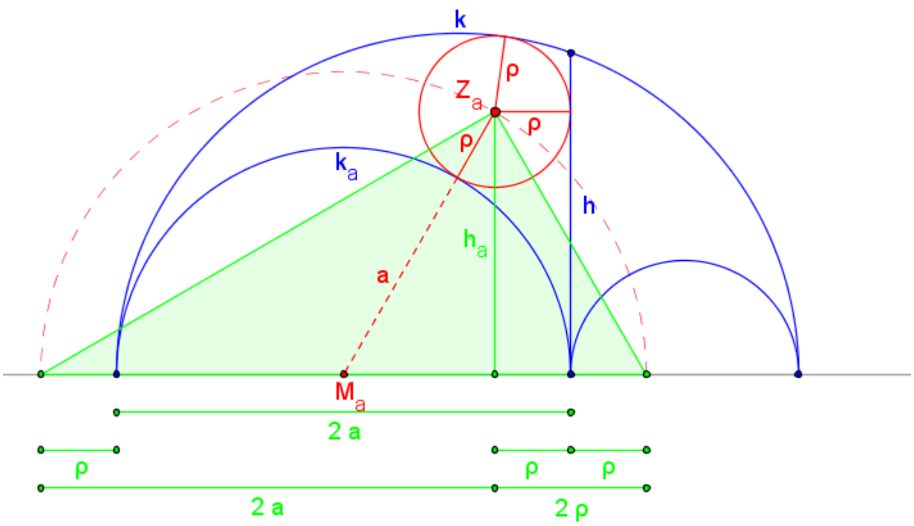


Abbildung 7.5

Aus dieser Zeichnung erhält man mit dem Höhensatz die Gleichung

$$h_a^2 = 2a \cdot 2\rho = 4a\rho . \tag{1}$$

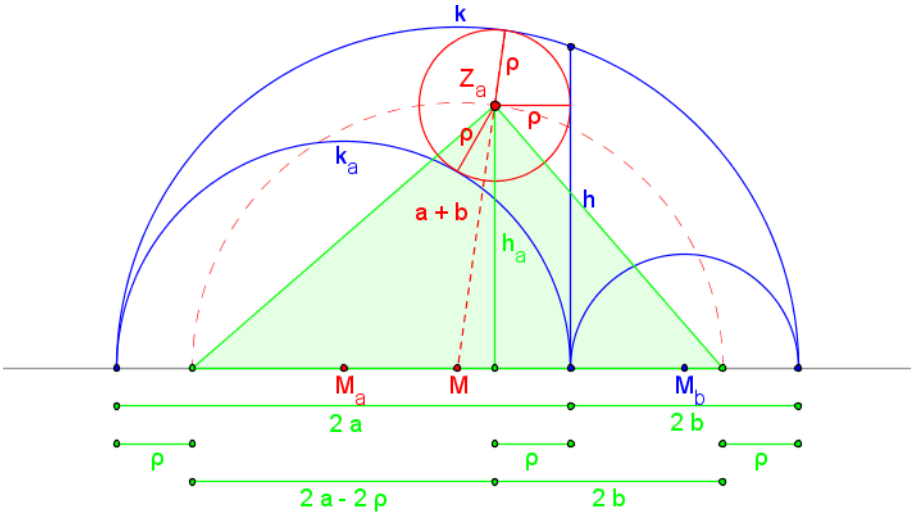


Abbildung 7.6

Und diese Zeichnung liefert wieder mit dem Höhensatz eine zweite Gleichung

$$h_a^{\,2} = (2a - 2\rho) \cdot 2b = 4ab - 4b\rho. \tag{2}$$

Aus $h_a^{\,2} = 4a\rho$ (1) und $h_a^{\,2} = 4ab - 4b\rho$ (2) folgt

$$4a\rho = 4ab - 4b\rho.$$

Diese Gleichung enthält als Unbekannte nur noch ρ, wonach aufgelöst wird:

$$a\rho = ab - b\rho$$

$$a\rho + b\rho = ab$$

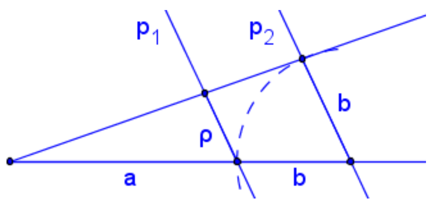
$$(a+b) \cdot \rho = ab$$

$$\rho = \frac{ab}{a+b} \tag{3}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass beide Kreise den gleichen Radius haben. Denn führt man die analoge Rechnung für den rechten Zwilling durch, so vertauscht man den linken Kreis ka mit dem rechten Kreis kb. In den Rechnungen werden dann die Radien a und b ausgetauscht. Da der Ausdruck für den Radius ρ hinsichtlich der Variablen a und b symmetrisch aufgebaut ist, ergibt sich aber derselbe Ausdruck. Das hießt, dass auch der rechte Zwilling den gleichen Radius hat[8].

Um eine rein geometrische Konstruktion der Zwillinge zu erhalten, müssen wir die Berechnung in eine Konstruktion umsetzen. Hier helfen die Strahlensätze weiter:

Die Geraden p_1 und p_2 sind parallel. Daher gilt nach dem zweiten



[8] Anmerkung zur Verdeutlichung: Der Ausdruck $ab + a$ ist nicht symmetrisch in den Variablen a und b, denn ersetzt man beide gegenseitig, so erhält man $ba + b$, was im Allgemeinen eine andere Größe ist.

Strahlensatz $\rho : a = b : (a+b)$. Oder $\rho = \dfrac{ab}{a+b}$.

Diese Figur lässt sich geschickt im Arbelos unterbringen und erklärt die folgende Konstruktion.

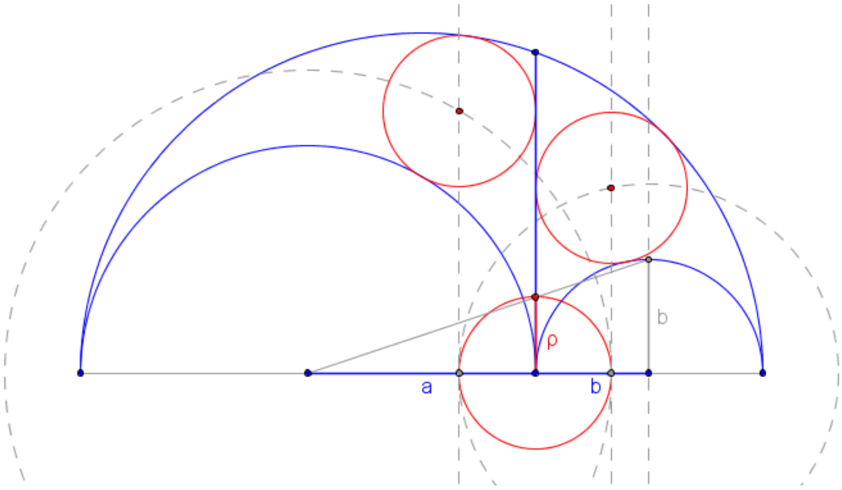


Abbildung 7.7

Mit den beiden Zwillingen ist eine weitere, bemerkenswerte Eigenschaft verbunden, die wir hier aber nur erwähnen wollen, ohne sie näher zu erläutern.

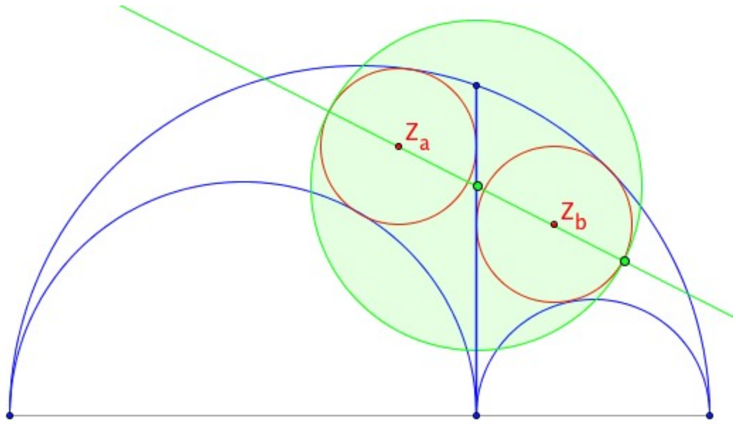


Abbildung 7.8

Konstruiert man den kleinsten Kreis, der die beiden Zwillinge umschließt, so hat dieser den gleichen Radius wie der Kreis des Archimedes, nämlich $\sqrt{ab}$.