



5 Das Rechteck im Kreis des Archimedes

Wir wollen nun die beiden Ergänzungen zum Arbelos, nämlich das Innendreieck (Kapitel 3) und den Kreis des Archimedes (Kapitel 4) miteinander kombinieren und weitere Eigenschaften entdecken. Wir zeichnen in den Arbelos das Innendreieck. Die Schnittpunkte mit den inneren Halbkreisen sind E und F. (Abbildung 5.1).

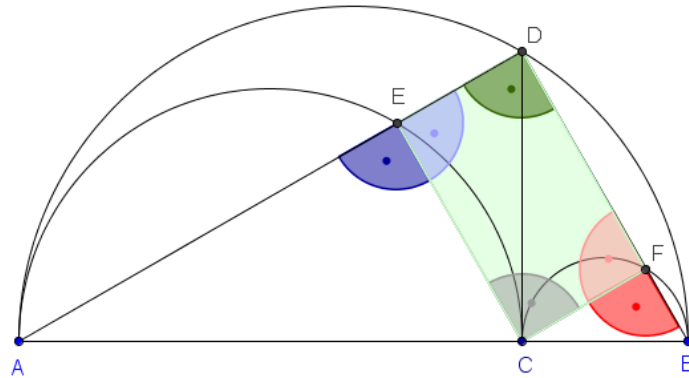


Abbildung 5.1

Satz

Das Viereck CFDE ist ein Rechteck.

Beweis

Nach dem Satz des Thales gilt, dass der dunkelblaue Winkel ($\sphericalangle CEA$), der dunkelrote Winkel ($\sphericalangle BFC$) und der dunkelgrüne Winkel ($\sphericalangle BDA$) 90° betragen.

Da der dunkelblaue Winkel ($\sphericalangle CEA$) und der hellblaue Winkel ($\sphericalangle DEC$) Nebenwinkel sind, sind beide gleich groß nämlich 90° . Entsprechendes gilt für den dunkelroten ($\sphericalangle BFC$) und den hellroten Winkel ($\sphericalangle CFD$). Da die Innenwinkelsumme eines Vierecks 360° beträgt, der hellblaue ($\sphericalangle DEC$), der hellrote ($\sphericalangle CFD$) und der dunkelgrüne Winkel ($\sphericalangle BDA$) jeweils 90° groß sind, muss der graue Winkel ($\sphericalangle ECF$) ebenfalls 90° groß sein.

Folgerung: Der Umkreis dieses Rechtecks ist der Kreis des Archimedes (Abbildung 5.2).

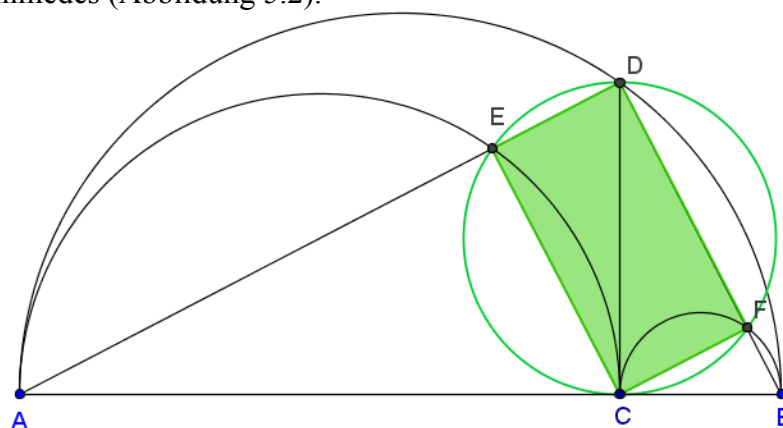


Abbildung 5.2



Denn der Kreis des Archimedes ist der Thaleskreis über $\overline{CD}$. Da die Winkel bei E und F rechte Winkel sind, liegen die Punkte nach der Umkehrung des Satzes von Thales auf dem Thaleskreis, also dem Kreis des Archimedes.

6 Die Tangenten des Arbelos

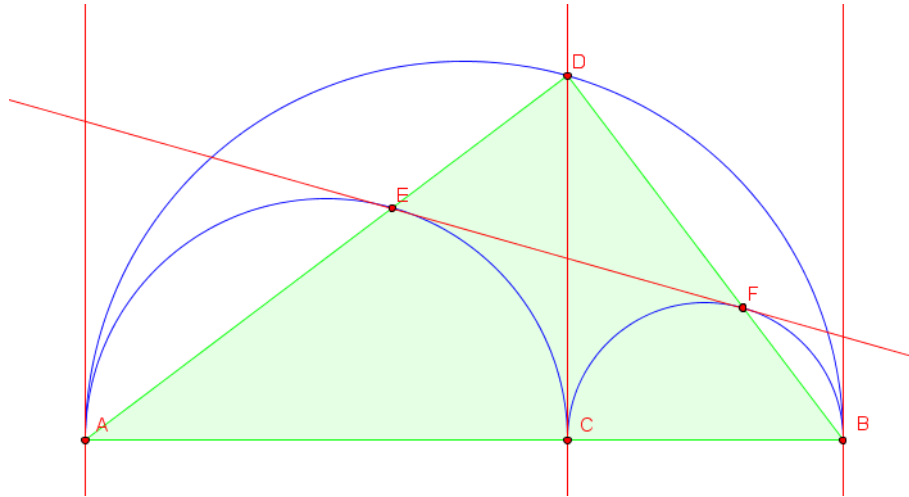


Abbildung 6.1: Der Arbelos, sein inneres Dreieck und seine Tangenten

Satz

Die Diagonalen des Rechtecks (laut Kapitel 5) sind Tangenten an die beiden inneren Kreise des Arbelos. Insbesondere ist die Gerade EF eine gemeinsame Tangente mit E und F als Berührungspunkte.

Beweis

M_R sei der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks CFDE. Wir zeigen, dass das Viereck M_aCM_RE (Abbildung 6.2) symmetrisch zur Geraden M_aM_R ist. Dann ist EF als Spiegelbild von CD ebenfalls Tangente an den Halbkreis über $\overline{AC}$.

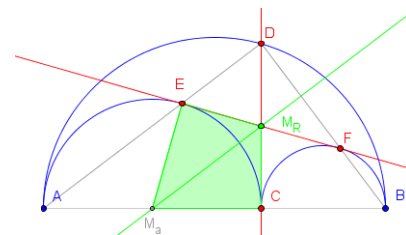


Abbildung 6.2

M_a ist als Mittelpunkt des Halbkreises gleichweit von C und E entfernt. Also liegt M_a auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CE}$.

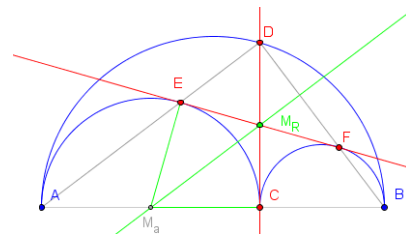


Abbildung 6.3

M_R ist der Schnittpunkt der beiden

Diagonalen des Rechtecks CFDE. Folglich ist daher M_R gleichweit von C und E entfernt und liegt daher auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CE}$.

Werden nun der Kreis k_a (um M_a) und die Gerade $CD = CM_a$, die Tangente an k_a ist, an der Geraden M_aM_R gespiegelt, so wird der Kreis



auf sich selbst abgebildet und die Gerade CM_a auf die Gerade $EM_a = EF$. Dabei bleibt die Tangenteneigenschaft erhalten. Also ist EF Tangente an k_a . ■

Ganz analog beweist man, dass EF auch Tangente an k_b ist mit dem Berührungspunkt F .

7 Die Zwillinge des Archimedes

Die Höhe teilt den Arbelos in zwei Teile. Beide sind begrenzt von zwei Kreisbögen und einer Strecke. Wie einem von Strecken begrenzten Dreieck kann man auch diesen Figuren je einen Kreis einbeschreiben, der jeweils die drei Begrenzungslinien berührt.

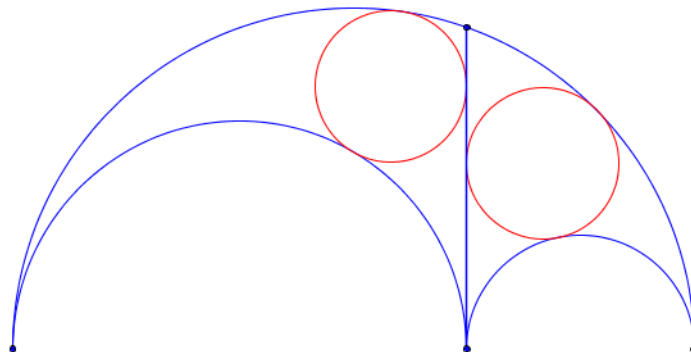


Abbildung 7.1: Die beiden Zwillinge in den beiden Teilen des Arbelos

In diesem Kapitel geht es um diese beiden Kreise und darum, wie man sie mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

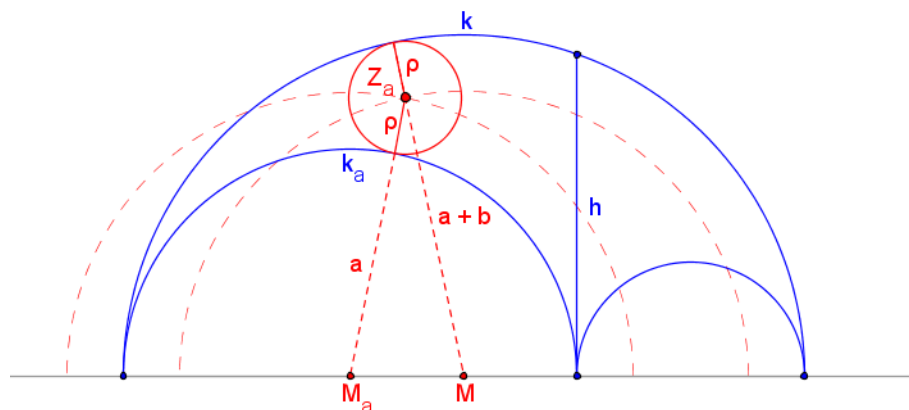


Abbildung 7.2: Ein Kreis, der k_a und k berührt, nicht aber h

Hier ist zunächst einmal um M_a ein zu k_a konzentrischer Kreis mit dem Radius $a + \rho$ (ρ - sprich rho – was eine übliche Bezeichnung für den Radius des Inkreises ist) gelegt worden. Jeder Punkt dieses Kreises hat zum Halbkreis k_a den Abstand ρ . Dann ist um M ein Kreis mit dem Radius $a + b - \rho$ beschrieben worden. Der Schnittpunkt Z_a der beiden Kreise hat also zu den Halbkreisen k_a und k den gleichen Abstand ρ . Der rote Kreis um den Punkt Z_a hat den Radius ρ , berührt also die beiden Halbkreise k_a und k . Wenn man den Radius ρ größer macht, wandert der rote Kreis stetig auf die Höhe h zu, bis er auch diese berührt. Das zeigt Abbildung 7.3.