Inhalt

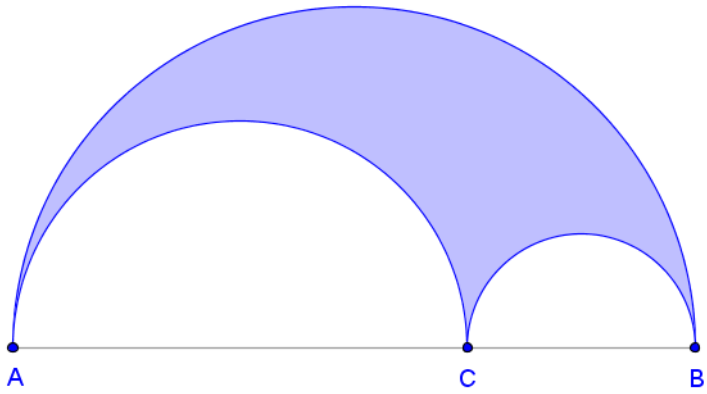
1 Der Rote Faden 2
1.1 Definition 2
1.2 Geschichte 2
2 Elementare Längenverhältnisse und Flächen 4
2.1 Elementare Bezeichnungen 4
2.2 Kreisbögen 5
2.3 Flächen 5
3 Das Innendreieck 6
4 Der Kreis des Archimedes 7
4.1 Umfang 7
4.2 Fläche 8
5 Das Rechteck im Kreis des Archimedes 10
6 Die Tangenten des Arbelos 11
7 Die Zwillinge des Archimedes 12
8 Der Inkreis des Arbelos 16
9 Anhang 22
9.1 Verhältnisgleichungen 22
9.2 Strahlensätze 22
9.3 Satzgruppe des Pythagoras 27
10 Mathematiker 29
11 Übungsaufgaben 31

1 Der Rote Faden

In diesem Kapitel geht es darum, sich an einige grundlegende Sätze der Geometrie (aus der Schule) zu erinnern und diese anzuwenden und zu üben. Es geht um Ähnlichkeit, Streckenverhältnisse, Strahlensätze, den Satz von Pythagoras, das Berechnen von Flächeninhalten und Streckenlängen und Vieles mehr. Das soll nun nicht Schritt für Schritt geübt werden, sondern alles ist in eine interessante, überraschend reichhaltige Figur gepackt: den Arbelos, auf Deutsch das Schustermesser.

1.1 Definition

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$, ein Punkt C im Inneren der Strecke sowie die drei Halbkreise über den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ in einer Halbebene von $\overline{AB}$. Dann nennen wir den von den drei Kreisbögen berandeten Bereich Arbelos.



Die hier eingefärbte Fläche ist die Fläche des Arbelos. Bei allen nachfolgenden Betrachtungen denken wir uns den Punkt C auf der Strecke $\overline{AB}$ beweglich. Aussagen zum Arbelos beziehen sich also nie auf ein festes C, sondern gelten immer für alle möglichen Lagen von C.

Aufgabe
Zeichnen Sie einen Arbelos mit Zirkel und Lineal und mit GeoGebra.

1.2 Geschichte

Das Wort Arbelos kommt aus dem antiken Griechenland. Es bezeichnet ein spezielles Messer, das die Schuster in ihrem Handwerk nutzten. Ein Arbelos, „Schustermesser“ oder auch „Halbmondmesser“ wird in Deutschland heutzutage in der handwerklichen Verarbeitung von Leder, z.B. im Kirschner- und Lederhandwerk, der Maßanfertigung von Schuhen oder im orthopädischen Bereich genutzt. Statt eines

Halbmondmessers (Abbildung 1.1) wird heute jedoch ein „Sattlermesser“ bevorzugt, das für den Fachmann über ähnliche Eigenschaften des Schneidens verfügt (Abbildung 1.2, unteres Werkzeug).

Abbildung 1.1

Abbildung 1.2

In der Orthopädie wird ein Halbmondmesser heute noch zu folgenden Tätigkeiten genutzt:

- Bei einem „Riemenschnitt“ werden Riemen mit paralleler Schnittkante erzeugt (Abbildung 1.3 und 1.4).

Abbildung 1.3

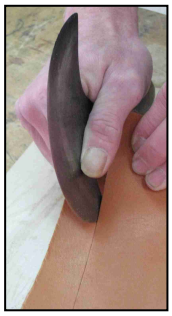


Abbildung 1.4

- Ein „Kurvenschnitt“ dient zum Schneiden kleiner Radien (Abbildung 1.5).
- Beim „Schärfen“ wird eine Lederkante ausgezogen, oder laienhaft ausgedrückt, sie wird angeschrägt (Abbildung 1.6).

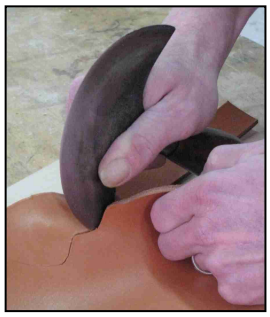


Abbildung 1.5

Abbildung 1.6

Es war vermutlich der griechische Mathematiker und Ingenieur Archimedes[1], der sich als erster mit der Mathematik eines Arbelos, also mit der dahinterstehenden idealtypischen Geometrie, beschäftigt

[1] 287 - 212 v.Chr.

hat. Soweit man es nachvollziehen kann, befasste er sich u.a. wahrscheinlich mit Fragestellungen des Flächeninhalts oder den Umfängen. Archimedes entdeckte die nach ihm benannten „Möndchen“ oder auch „(Mond-) Sicheln des Archimedes“.

Der US-Amerikaner Leon Bankhoff[2], ein Zahnarzt und Mathematiker, beschäftigte sich anscheinend als erster nach Archimedes wieder intensiv mit dem Arbelos. Er fand den sog. "Bankhoff Triplet Circle"[3]. Es handelt sich hier um einen dritten Kreis, der kongruent zu den „Zwillinge des Archimedes“ ist. In Folge der Forschungen Bankhoffs wurden viele weitere Zwillingskreise gefunden.

2 Elementare Längenverhältnisse und Flächen

2.1 Elementare Bezeichnungen

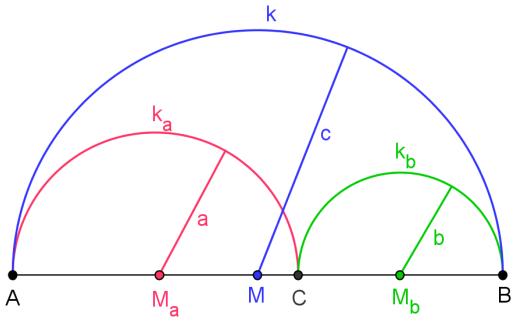


Abbildung 2.1

Für die Bezeichnungen am Arbelos wollen wir folgendes System verwenden: Alles , was sich auf den linken, kleineren Halbkreis bezieht, bekommt bei den Bezeichnungen einen Indes a, für den rechten Halbkreis verwenden wir den Index b. Bezeichnungen für Elemente, die sich auf die gesamte Strecke $\overline{AB}$ beziehen, nehmen wir keinen Index.

Der äußere Halbkreis sei k mit dem Mittelpunkt M.

Der linke innere Halbkreis sei k_a mit dem Radius $a = \frac{1}{2}\overline{AC}$ und Mittelpunkt M_a. Der rechte innere Halbkreis sei k_b mit dem Radius $b = \frac{1}{2}\overline{CB}$ und dem Mittelpunkt M_b.

Der Durchmesser des Halbkreises k ist $\overline{AB}$ und hat die Länge $2 \cdot a + 2 \cdot b$.

Daraus ergibt sich der Radius c des Halbkreises k als Summe der Radien der Halbkreise k_a und k_b:

$$c = \frac{2 \cdot a + 2 \cdot b}{2} = a + b \qquad (1)$$

[2] 13.12.1908 - 16.02.1997

[3] Nachweis 1954, veröffentlicht 1974

2.2 Kreisbögen

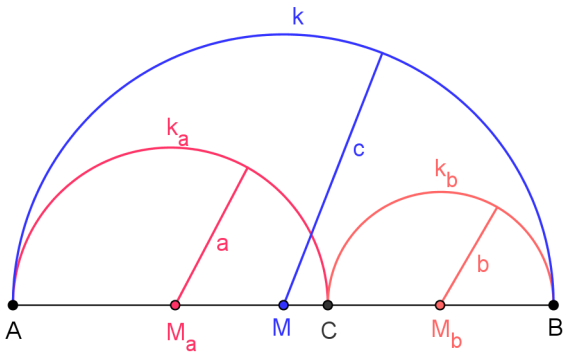


Abbildung 2.2

Die Länge des Kreisbogens k_a ist $\frac{2\cdot\pi\cdot a}{2}=\pi\cdot a$.

Die Länge des Kreisbogens k_b ist $\frac{2\cdot\pi\cdot b}{2}=\pi\cdot b$.

Die Lange des Kreisbogens k ist $\frac{2\cdot\pi\cdot c}{2}=\pi\cdot c$ und damit nach (1) $\pi\cdot(a+b)=\pi\cdot a+\pi\cdot b$.

Damit ist k genauso lang wie k_a und k_b zusammen.

2.3 Flächen

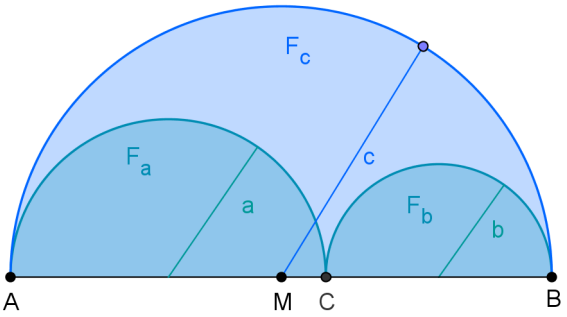


Abbildung 2.3

Die Fläche des Arbelos F_A ergibt sich aus den Flächen F_a, F_b und F_c der drei Halbkreise, die den Arbelos begrenzen:

$$F_A = F_c - F_a - F_b$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot c^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot b^2$$

Mit $c = a + b$ (1) folgt:

$$F_A=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left((a+b)^2-a^2-b^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2-b^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2\cdot a\cdot b$$
$$=\pi\cdot a\cdot b$$

3 Das Innendreieck

Errichtet man in C die Senkrechte zu $\overline{AB}$, so schneidet diese den Kreisbogen *k* in *D*. Es entsteht das Innendreieck *ABD*. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ein rechtwinkliges.

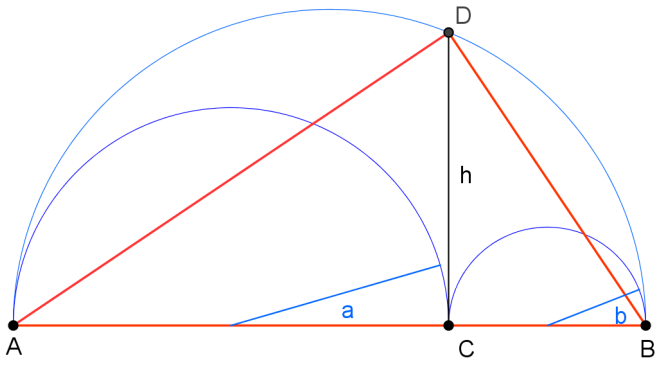


Abbildung 3.1

Die Seitenlängen und die Höhe des Dreiecks lassen sich wie folgt berechnen:

$\overline{AB} = 2 \cdot (a+b)$ (s. Def. Arbelos)

$\overline{CD} = h = 2\sqrt{a \cdot b}$ (wegen Höhensatz: $h^2 = 2a \cdot 2b$)

$\overline{BD} = 2 \cdot \sqrt{b \cdot (a+b)}$ (wegen Pythagoras: $\overline{BD}^2 = (2b)^2 + 2a \cdot 2b$)

$\overline{AD} = 2\sqrt{a \cdot (a+b)}$ (wegen Pythagoras: $\overline{AD}^2 = (2a)^2 + 2a \cdot 2b$)

4 Der Kreis des Archimedes

Bei den Überlegungen zum Arbelos beschäftigte sich Archimedes auch mit dem Kreis über der Höhe *h*:

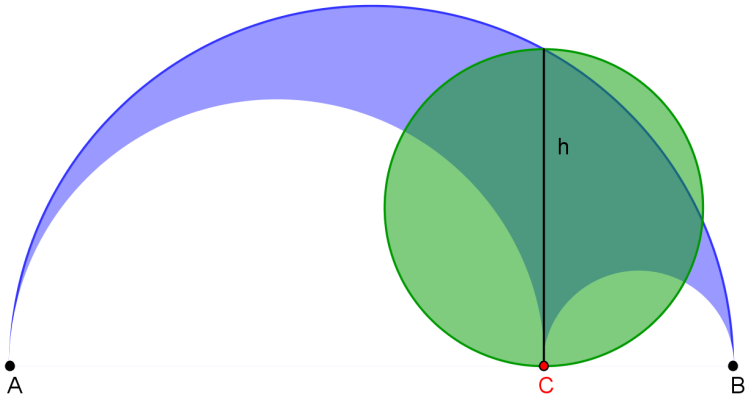


Abbildung 4.1 : Arbelos mit dem Kreis des Archimedes

4.1 Umfang

Der Umfang des Arbelos U_A ist bestimmt durch[4]:

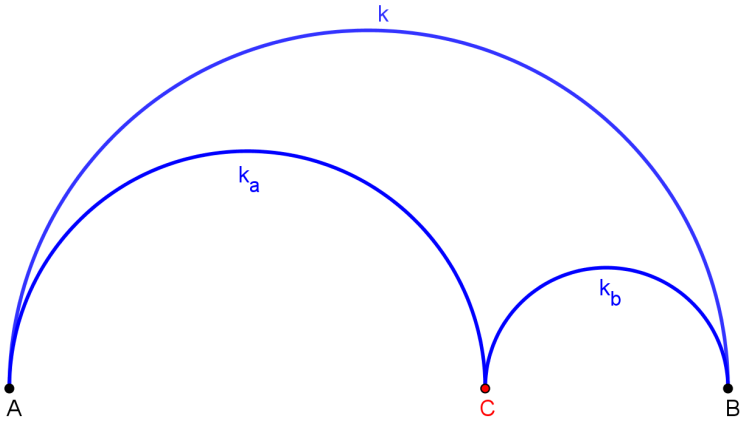


Abbildung 4.2: der Umfang U_A des Arbelos

$$U_A = k + k_a + k_b = 2 \cdot \pi \cdot (a + b)$$

Und damit, unabhängig von der Position des Punktes *C*, konstant.

[4] Siehe Kapitel 2.2

Der Umfang des Kreises U_K ist:

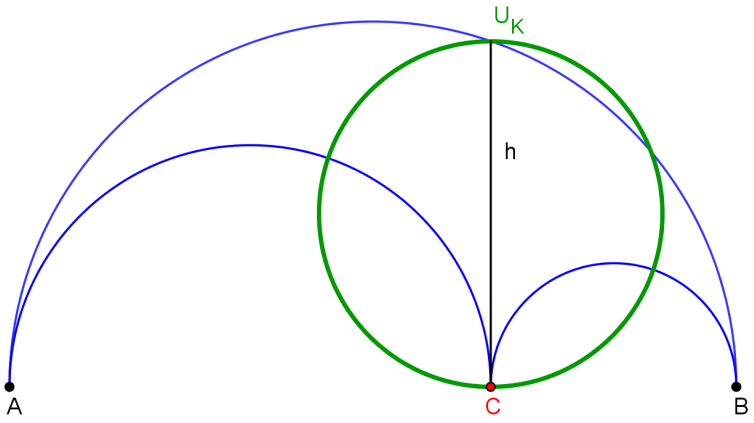


Abbildung 3: der Umfang U_K des Kreises des Archimedes

$$U_K = \pi h$$

Da die Höhe h je nach Position des Punktes C variiert, kann der Umfang U_K des Kreises nicht konstant sein.
Für den Umfangs finden wir also keinen Zusammenhang zwischen Arbelos und dem Kreis des Archimedes.

In der Schule sind allgemeingültige Vergleiche auf der Formel- oder rechnerischen Ebene erst in höheren Jahrgangsstufen denkbar. Im Grundschulbereich bedient man sich möglichst konkreter Methoden, in diesem Fall dem direkten Längenvergleich. Das heißt, dass für unterschiedliche Beispiele der Umfang beider Formen mit einem Faden nachgelegt und ihre Längen verglichen werden.

4.2 Fläche

Die Fläche des Arbelos F_A[5]:

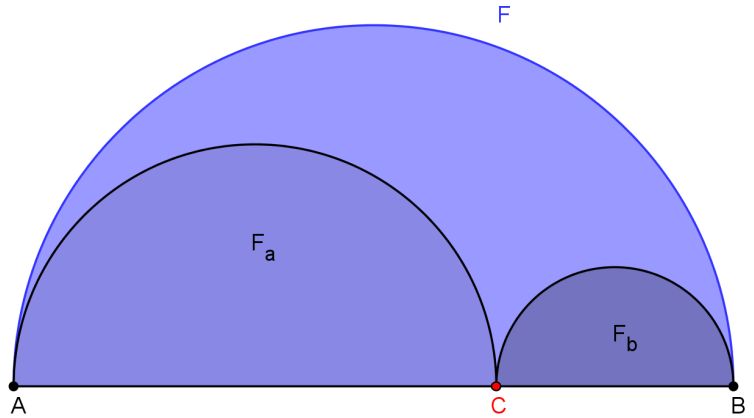


Abbildung 4.4: die Fläche F_A des Arbelos

[5] Siehe Kapitel 2.3

$$F_A = \pi \cdot a \cdot b$$

Die Fläche des Kreises des Archimedes F_K bestimmt sich zunächst durch die Höhe h.

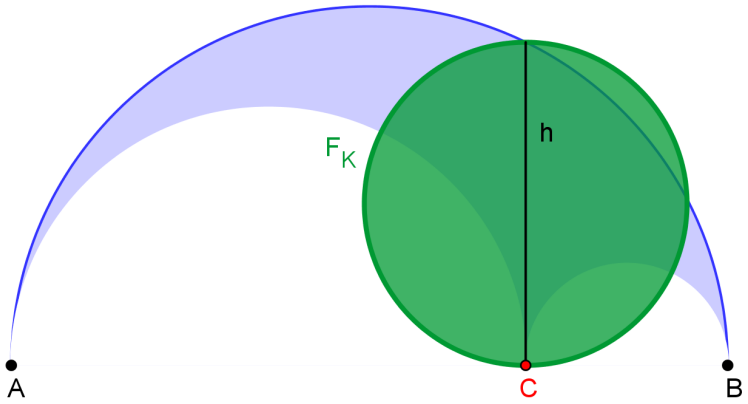


Abbildung 4.5: die Fläche F_K des Kreises des Archimedes

$$F_K = \frac{1}{4}\pi h^2$$

Im Kapitel 3 hatten wir für die Höhe gefunden: $h = 2\sqrt{a \cdot b}$. Setzen wir das ein, so erhalten wir $F_K = \pi \cdot a \cdot b$.

Damit ist bewiesen, dass $F_A = F_K$, also die Fläche des Arbelos und des Kreises des Archimedes gleich sind. Und das gilt unabhängig von der Position des Punktes C.

In unteren Jahrgangsstufen ist dieser Nachweis in Beispielen wie schon von Archimedes zu erbringen: „Archimedes benutzte auch eine damals neue Methode, um Hypothesen zum Flächeninhalt krummlinig begrenzter Flächen (z.B. von Parabeln und Quadraten) praktisch zu überprüfen. Er zeichnete die entsprechenden Flächen auf dünne Tafeln (z.B. aus Holz, mehrlagigem Papyrus oder vielleicht auch Ton) auf und schnitt sie anschließend aus. Danach verglich er das Gewicht der ausgeschnittenen Flächenstücke. Dadurch konnte er falsche Hypothesen durch Messung des Gewichts bereits von vorneherein ausschließen.“ [6,7]

[6] Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes, 3.2.1 Flächenberechnungen

[7] Dabei ist, da Kinder lediglich festes Papier schneiden können, ein Waage mit einem Messbereich bis 100stel g nötig.