9 Anhang

9.1 Verhältnisgleichungen

Verhältnisgleichungen sind spezielle Formen von Gleichungen. Es werden zwei Quotienten gleich gesetzt. Die Gleichung $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ kann man auch schreiben als $a:b=c:d$.
In dieser verwendeten, speziellen Schreibweise kann man „innere“ und „äußere“ Zahlen unterscheiden.

Satz
Für $a,b,c,d \neq 0$ gelten

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc \tag{1}$$

In einer Verhältnisgleichung ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow a:c=b:d \tag{2}$$

In einer Verhältnisgleichung kann ich die Innenglieder vertauschen.

$$a:b=c:d \Leftrightarrow d:b=c:a \tag{3}$$

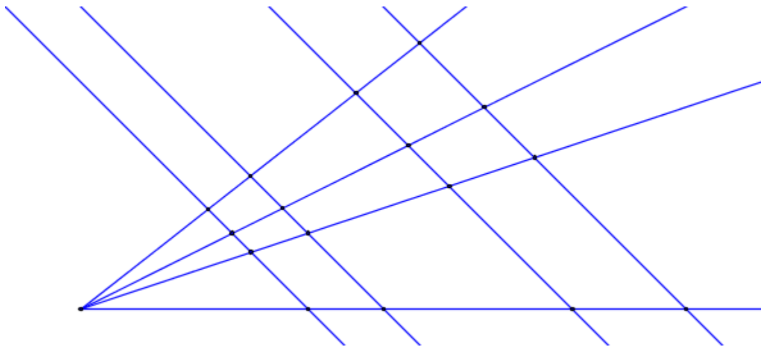
In einer Verhältnisgleichung kann ich die Außenglieder vertauschen.

Beweis

Zu (1) $a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd \Leftrightarrow ad=bc$

Zu (2),(3) Die Verhältnisgleichungen haben dieselbe Produktgleichung.

9.2 Strahlensätze



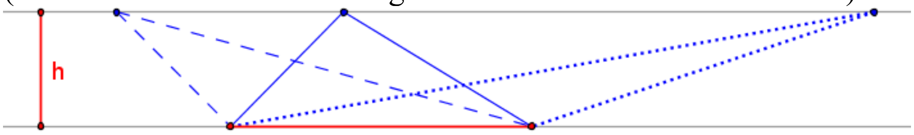
Dies ist ein Strahlenbüschel, das von parallelen Geraden geschnitten wird. Die Strahlensätze untersuchen, wie sich die Strecken solch einer Figur zueinander verhalten. Der erste Strahlensatz macht Aussagen über das Verhalten von Strecken auf den Strahlen. Der zweite Strahlensatz nimmt die Strecken auf den Parallelen hinzu. Der dritte Strahlensatz handelt von Strecken, die auf den Parallelen liegen.

Erster Strahlensatz

Wird ein Strahlenbüschel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf einem Strahl wie die entsprechenden Strecken auf irgendeinem anderen Strahl.

Beweis

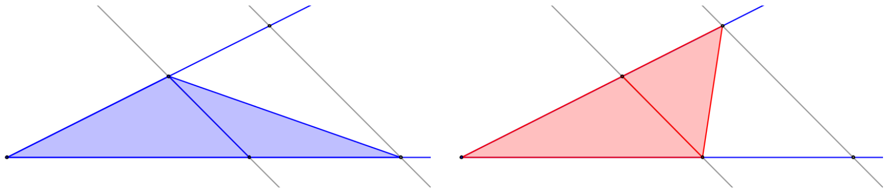
(wiederholende Vorbemerkung zum Flächeninhalt von Dreiecken)



Das gestrichelte, das durchgezogene und das gepunktete Dreieck haben den gleichen Flächeninhalt; denn der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich als

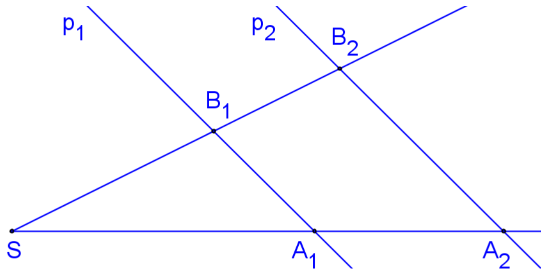
$$F_{\Delta} = \frac{Grundseite \cdot Höhe}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$$

Und hier haben die Dreiecke dieselbe Grundseite, und - wegen der Parallelität der waagerechten Geraden - sind auch ihre Höhen gleich lang.



Daher sind auch diese beiden Dreiecke - wiederum Parallelität vorausgesetzt - gleich groß.

Nun zum eigentlichen Beweis



Die Behauptungen des ersten Strahlensatzes sind, bezogen auf diese Zeichnung:

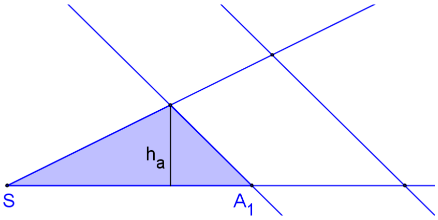
$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2} \qquad (1)$$

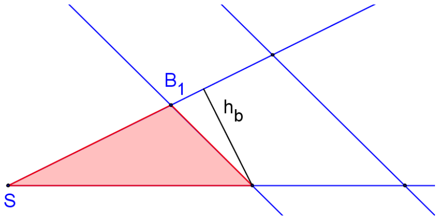
und

$$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2} \qquad (2)$$

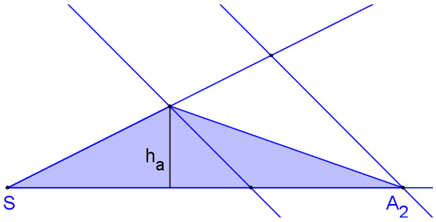
In (1) werden zwei Anfangsstücke ins Verhältnis gesetzt, in (2) ein Anfangsstück und das angrenzende Nichtanfangsstück.

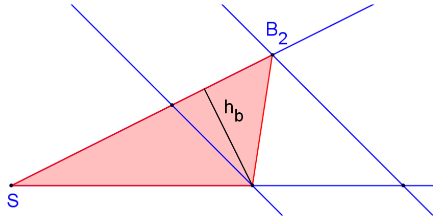
Zu (1)





Die Flächen sind gleich, also gilt $\frac{1}{2}\cdot\overline{SA_1}\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{SB_1}\cdot h_b$.





Diese Flächen sind gleich groß, also gilt $\frac{1}{2}\cdot\overline{SA_2}\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot\overline{SB_2}\cdot h_b$.

Beide Gleichungen werden dividiert

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{SA_1}\cdot h_a}{\frac{1}{2}\cdot\overline{SA_2}\cdot h_a}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{SB_1}\cdot h_b}{\frac{1}{2}\cdot\overline{SB_2}\cdot h_b}$$

und gekürzt. Damit ergibt sich

$$\overline{SA_1}:\overline{SA_2}=\overline{SB_1}:\overline{SB_2}$$

Zu (2) Wir betrachten die Kehrwerte der Behauptung.

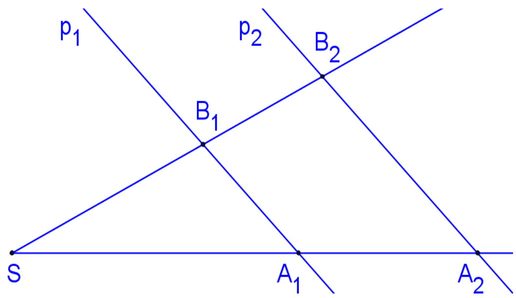
$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{SA_1}}=\frac{\overline{SA_2}-\overline{SA_1}}{\overline{SA_1}}=\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}-1\overset{(1)}{=}\frac{\overline{SB_2}}{\overline{SB_1}}-1=\frac{\overline{SB_2}-\overline{SB_1}}{\overline{SB_1}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{SB_1}}$$

Zweiter Strahlensatz

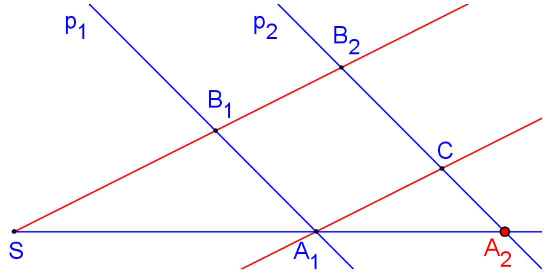
Hier gilt

$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow$

$\overline{SA_1}:\overline{SA_2}=\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}$ (5)



Beweis

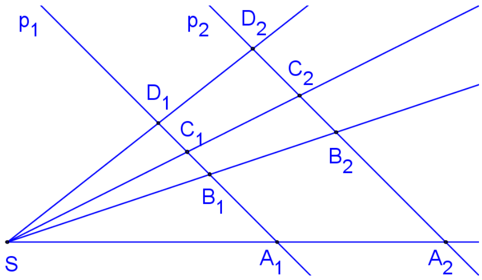


Man zeichnet eine Parallele zu SB_2 durch A_1 und betrachte die neue Figur vom neuen Strahlungszentrum A_2 aus. Da hier $\overline{CB_2}$ und $\overline{A_1B_1}$ als Gegenseiten eines Parallelogramms gleich lang sind, gilt nach (1)

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_2S}} = \frac{\overline{CB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} \qquad \blacksquare$$

Dritter Strahlensatz

$$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow$$
$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{C_1D_1} : \overline{C_2D_2} \qquad (6)$$

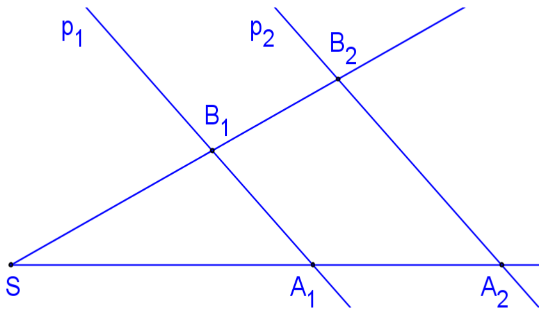


Beweis
Nach dem ersten und dem zweiten Strahlensatz gilt hier

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{C_2D_2}} \qquad \blacksquare$$

Umkehrung des ersten Strahlensatzes

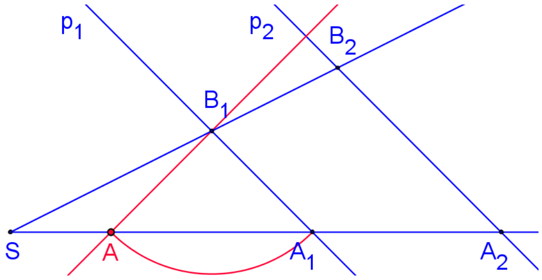
$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$
$$\Rightarrow p_1 \parallel p_2 \qquad (7)$$



Wenn die Parallele zur Geraden A_1B_1 durch den Punkt A_2 den anderen Strahl im Punkt B^* schneidet, dann gilt nach dem ersten Strahlensatz $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB^*}$. Andererseits gilt $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$ laut Voraussetzung. Daraus folgt $\overline{SB_1} : \overline{SB_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB^*}$ und mithin auch $B_2 = B^*$. Also sind A_1B_1 und A_2B_2 zueinander parallel. $\blacksquare$

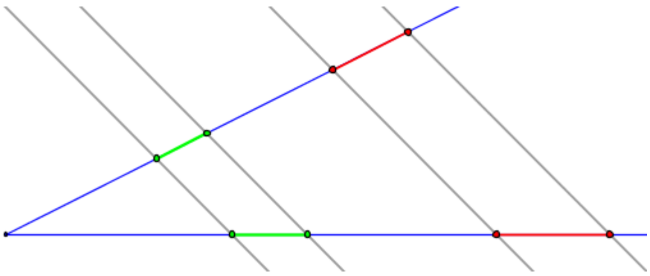
Der zweite und der dritte Strahlensatz sind **nicht umkehrbar**.

Gegenbeispiel zum 2. Strahlensatz



Hier gilt $\overline{SB_1}:\overline{SB_2} = \overline{AB_1}:\overline{A_2B_1}$. Dennoch ist die rote Gerade AB_1 nicht zu p_2 parallel.

Gegenbeispiel zum 3. Strahlensatz

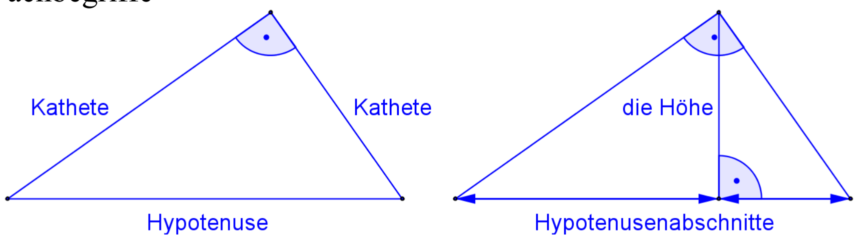


Wenn die grauen Geraden parallel zueinander sind, stehen nach dem ersten Strahlensatz die grünen Strecken in demselben Verhältnis wie die roten. Dennoch sind die blauen Halbgeraden nicht parallel.

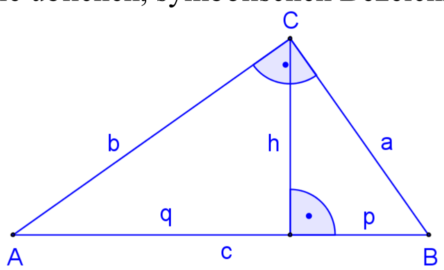
9.3 Satzgruppe des Pythagoras

9.3.1 Begriffe und Bezeichnungen

Fachbegriffe



Die üblichen, symbolischen Bezeichnungen sind



9.3.2 Die Satzgruppe

Neben dem eigentlichen Satz von Pythagoras gibt es mehrere Sätze, die ebenfalls mit dem rechtwinkligen Dreieck zusammenhängen. Zum Teil sind auch die Beweise dieser Sätze eng miteinander verbunden. Daher fasst man diese Sätze zu einer Satzgruppe zusammen.

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$

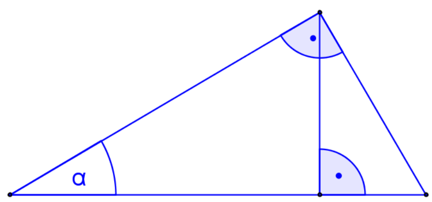
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

9.3.3 Aufgaben als Vorbereitung für die nachfolgenden Beweise

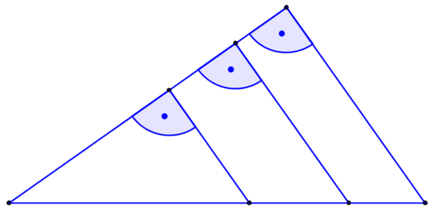
1. Jedes Dreieck hat drei Höhen. Dennoch sagt man '<u>Die</u> Höhe des rechtwinkligen Dreiecks'.

2. a) In diesem rechtwinkligen Dreieck ist α 30° groß. Wie groß sind die anderen Winkel?
   b) Beweisen Sie: Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks zerlegt den rechten Winkel in die beiden anderen Winkel des Dreiecks.

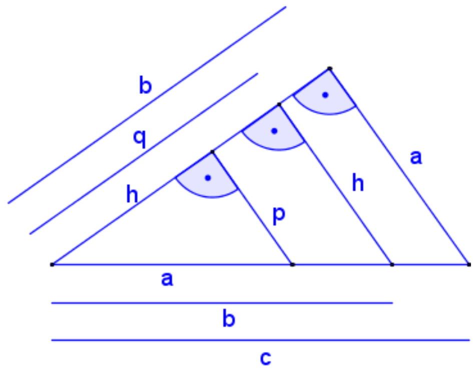


3. Nehmen Sie als Beispiel für ein Rechteck ein DinA6 - Papier. Zeichnen Sie eine der beiden Diagonalen des Rechtecks. Zeichnen Sie in eines der beiden Dreiecke die Höhe. Beschriften sie die Dreiecke mit den Buchstaben a, b, c, h, p, q. Schneiden Sie die drei Dreiecke aus.

Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks zerlegt dieses in zwei wiederum rechtwinklige Teildreiecke. Das Dreieck selbst und seine beiden Teildreiecke haben paarweise gleichgroße Winkel und lassen sich daher zu einer solchen Figur zusammenfügen. Beschriften Sie die Dreiecksseiten und stellen Sie systematisch alle Verhältnisgleichungen auf.



9.3.4 Beweise



Nach dem 1. Strahlensatz gilt

$$\frac{a}{b}=\frac{h}{q}\ ,\ \frac{a}{c}=\frac{h}{b}\ ,\ \frac{b}{c}=\frac{q}{b}$$

Nach dem 2.Strahlensatz gilt

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{h}\ ,\ \frac{a}{c}=\frac{p}{a}\ ,\ \frac{b}{c}=\frac{h}{a}$$

und

$$\frac{h}{q}=\frac{p}{h}\ ,\ \frac{h}{b}=\frac{p}{a}\ ,\ \frac{q}{b}=\frac{h}{a}$$

Unter diesen Verhältnisgleichungen fallen diejenigen auf, in denen dieselbe Variable zweimal auftaucht.

$\frac{h}{q}=\frac{p}{h}$ Die zugehörige Produktgleichung ist $h^2=p\cdot q$, also der Höhensatz.

$\frac{a}{c}=\frac{p}{a}$, $\frac{b}{c}=\frac{q}{b}$ Die zugehörigen Produktgleichungen sind $a^2=c\cdot p$, $b^2=c\cdot q$, also die Kathetensätze.

Aus den beiden Kathetensätzen folgt

$a^2+b^2=c\cdot p+c\cdot q=c\cdot(p+q)=c\cdot c=c^2$, also gilt $c^2=a^2+b^2$

Anmerkung: Der Satz des Pythagoras ist einer der bekanntesten Sätze der Mathematik. Viele verschiedene Mathematiker haben einen Beweis dazu geliefert. Eine sehr schöne und umfangreiche Sammlung von Beweisen findet man unter

`http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/`

10 Mathematiker

- **Archimedes** (287 - 212 v.Chr.) gilt als der größte griechische Mathematiker und Ingenieur des Altertums und wandte Mathematik erstmals praktisch an.
- **Pythagoras von Samos** (570 - 497/496 v.Chr.) war ein griechischer Philosoph, der den Bund der Pythagoreer gründete. Seine nur mündlich vorgetragenen Lehrmeinungen umfassten u.a. mystischpriesterliche Weisheit. Die Entdeckung bestimmter rationaler Zahlenverhältnisse in der Natur führte Pythagoras zu der Lehre, dass das Wesen der Wirklichkeit die Zahl sei. Die Aussage des ihm zugeschriebenen „Satz des Pythagoras" war für Einzelfälle schon vor seiner Zeit bekannt. Auf Pythagoras geht der Begriff „Mathematik" zurück.
- **Pappos von Alexandria** (auch „Pappus", latinisierte Form des Namens) (um 300 n.Chr.), gilt als einer der letzten bedeutenden Mathematiker der Antike.
- **Euklid von Alexandria** (365 - 300 v.Chr.) war griechischer Mathematiker und fasste in seinem Werk „Elemente" in 13 Bänden die mathematischen Kenntnisse seiner Zeit erstmals schriftlich zusammen. Er begründete damit die „Euklidische Geometrie" und durchbrach förmlich einen Bann, da vor ihm Mathematik nur mündlich weitergegeben wurde. Euklid könnte dabei auf Studien und Bücher des Hippokrates von Chios aufgebaut haben. Euklid werden der „Satz von Euklid", der „Höhensatz des Euklid" und der „Kathetensatz des Euklid" zugeschrieben.
- **Thales von Milet** (um 650 - 560 v.Chr.) war ein griechischer Philosoph. Er zählte zu den sog. „Sieben Weisen" des alten Griechenlands. Ihm wird der „Satz des Thales" zugerechnet.
- **Leon Bankhoff** (13.12.1908 - 16.02.1997) ist US-Amerikanischer Mathematiker und Zahnarzt. Er gilt als Experte auf dem Gebiet der „Ebenen Geometrie". Er beschäftigte sich insb. mit dem „Arbelos" und fand hierin den sog. „Bankhoff Triplet Circle", einen dritten Kreis, kongruent zu den „Zwillingskreisen des Archimedes". Infolge seiner Studien wurden viele weitere kongruente Kreise gefunden.