Kubische Folge und ihre Differenzenfolgen

1		8		27		64		125		216		343	kubisch
	7		19		37		61		91		127		quadratisch
		12		18		24		30		36			linear
			6		6		6		6				konstant

quadratischer Ansatz für die erste Differenzenfolge *b*: $b_n = rn^2 + sn + t$

Dann gilt für die ersten drei Folgenelemente:

(1) $b_1 = r \cdot 1 + s \cdot 1 + t = 7$

(2) $b_2 = r \cdot 4 + s \cdot 2 + t = 19$

(3) $b_3 = r \cdot 9 + s \cdot 3 + t = 37$

Das ist ein Gleichungssystem von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten *r*, *s* und *t*.

$(3)-(2)$: (4) $5r + s = 18$

$(2)-(1)$: (5) $3r + s = 12$

Weitere Kombination: $(5)-(4)$: $2r = 6$, also $r = 3$

Einsetzen in (5): $9 + s = 12$, also $s = 3$

r und *s* einsetzen in (1): $3 + 3 + t = 7$, also $t = 1$

Also Lösung: $\underline{\underline{b_n = 3n^2 + 3n + 1}}$

Probe für *n*= 4, 5 und 6: $b_4 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1 = 48 + 12 + 1 = 61$

$b_5 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 75 + 15 + 1 = 91$ $\quad b_6 = 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1 = 108 + 18 + 1 = 127$

Alternative Herleitung:

Ist *a* die Folge der Kubikzahlen und *b* die Folge der ersten Differenzen, so gilt:

$b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 \cancel{- n^3} = 3n^2 + 3n + 1$