

3 Die Theorie des „Spiegelbuches“

Fügt man zwei Spiegel unter einem Winkel zusammen, so spricht man von einem „Spiegelbuch“. Blickt man in diese Spiegelanordnung, so kann man, abhängig vom Winkel zwischen beiden Spiegeln, mehrere Spiegelbilder sehen.

Wir wollen in diesem Kapitel darstellen, was wir im Spiegelbuch sehen und wie wir erklären können, was wir sehen.

3.1 Grundlagen des Spiegels

Wir wollen in dem Kapitel bei aller Betonung der mathematischen Hintergründe nicht außer Acht lassen, wie physikalisch ein Spiegelbild entsteht und warum die geometrische Spiegelung direkt mit der physikalischen Spiegelung an einer ebenen Oberfläche verbunden ist.

3.1.1 Das Spiegelbild

Von einem Gegenstand gehen Lichtstrahlen aus und wir sehen diesen Gegenstand, wenn einige dieser Strahlen in unser Auge fallen.

Ist nun in dem Strahlen-gang ein ebener Spiegel, werden die Lichtstrahlen reflektiert nach dem Gesetz „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“. Fallen die reflektierten

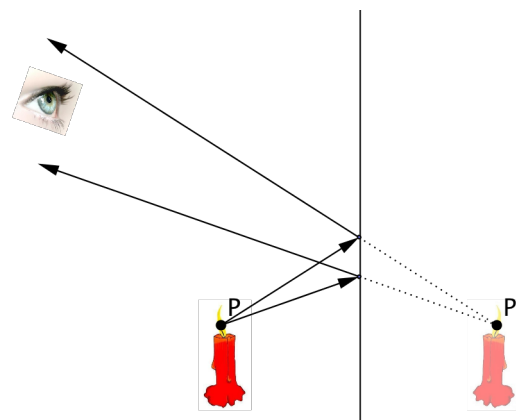


Abb. 3.1: Reflexion von Lichtstrahlen

Strahlen in unser Auge, so entsteht der Eindruck, dass die Strahlen von einem Gegenstand hinter dem Spiegel ausgehen, dem Spiegelbild. Das liegt daran, dass die empfangenen Strahlen auf der Netzhaut ein Bild entwerfen, das wir so interpretieren, als wenn die Strahlen geradlinig rückwärts verfolgt würden.

In der Abbildung gehen die Lichtstrahlen von der Kerze aus und werden am Spiegel reflektiert. Diese Lichtstrahlen werden vom Betrachter so interpretiert als ob sie von der hinter dem Spiegel stehenden Kerze bei P' ausgingen.

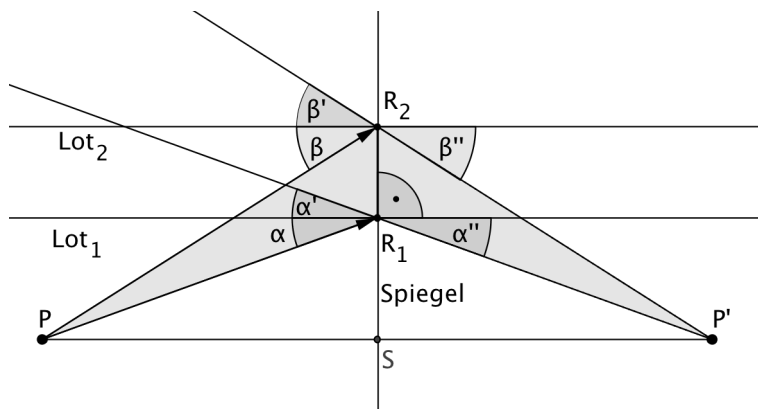


Abb. 3.2:

Wir zeigen nun, dass aus dem physikalischen Reflexionsgesetz „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“ folgt, dass die Spiegelung an ebenen Spiegel mit der geometrischen Spiegelung übereinstimmt.

In der Abbildung 3.2 sei P ein Originalpunkt, von dem zwei Beispielstrahlen ausgehen, die in den Punkten R_1 und R_2 auf den Spiegel treffen und dort reflektiert werden nach dem Reflexionsgesetz. Üblicherweise misst man die Winkel zum Lot zur spiegelnden Oberfläche. Also gilt nach dem Reflexionsgesetz: $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

Die reflektierten, ausfallenden Lichtstrahlen werden nach hinten verlängert und schneiden sich in P' . Wir wollen nun zeigen, dass P' der Bildpunkt von P bei der Achsenspiegelung an der Spiegelgeraden ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $|PS| = |SP'|$ ist und dass die Gerade PP' senkrecht auf der Spiegelgeraden steht.

Das ist gezeigt, wenn wir gezeigt haben, dass die Dreiecke PSR_1 und $SP'R_1$ kongruent zueinander sind.

1. Teilschritt: Die beiden Dreiecke PR_1R_2 und $P'R_1R_2$ sind kongruent.

In beiden Dreiecken liegt die gemeinsame Strecke $\overline{R_1R_2}$. Außerdem gilt $\alpha = \alpha' = \alpha''$ und $\beta = \beta' = \beta''$ (Reflexionsgesetz und Scheitelwinkel).

$$\text{Dann ist } |\sphericalangle R_2R_1P| = \alpha + 90^\circ = \alpha'' + 90^\circ = |\sphericalangle P'R_1R_2|$$

$$\text{und } |\sphericalangle PR_2R_1| = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta'' = |\sphericalangle R_1R_2P'|$$

Folglich sind die beiden Dreiecke kongruent nach dem Kongruenzsatz WSW.

Also sind auch die beiden entsprechenden Strecken $\overline{PR_1}$ und $\overline{R_1P'}$ gleich lang.

2. Teilschritt: Die beiden Dreiecke PSR_1 und $SP'R_1$ sind kongruent.

In beiden Dreiecken liegt die gemeinsame Strecke $\overline{SR_1}$.

$$|\overline{PR_1}| = |\overline{R_1P'}| \text{ als Folgerung von Teilschritt 1.}$$

$$|\sphericalangle PR_1S| = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha'' = |\sphericalangle SR_1P'|$$

Also sind die Dreiecke PSR_1 und $SP'R_1$ kongruent nach dem Kongruenzsatz SWS.

Dann sind die entsprechenden Strecken \overline{PS} und $\overline{SP'}$ gleich lang und die beiden entsprechenden Winkel $\sphericalangle R_1SP$ und $\sphericalangle P'SR_1$ gleich groß. Da beide Nebenwinkel sind, ergänzen sie sich zu 180° . Also müssen beide 90° groß sein. Das besagt aber, dass die Gerade PP' senkrecht auf der Spiegelgeraden steht.

Damit sind die Eigenschaften bewiesen, die aussagen, dass P' der Bildpunkt von P bei Spiegelung an der Spiegelgeraden ist.

3.1.2 Was ist „spiegelverkehrt“?

Sieht man in einen Spiegel und erkennt Text, so bemerkt man, dass er schwer lesbar ist, da er „spiegelverkehrt“ ist. Links und rechts sind vertauscht.

SPIEGELVERKEHRT

Bei genauerer Überlegung erhebt sich die Frage, warum der Spiegel rechts und links vertauscht, nicht aber oben und unten.

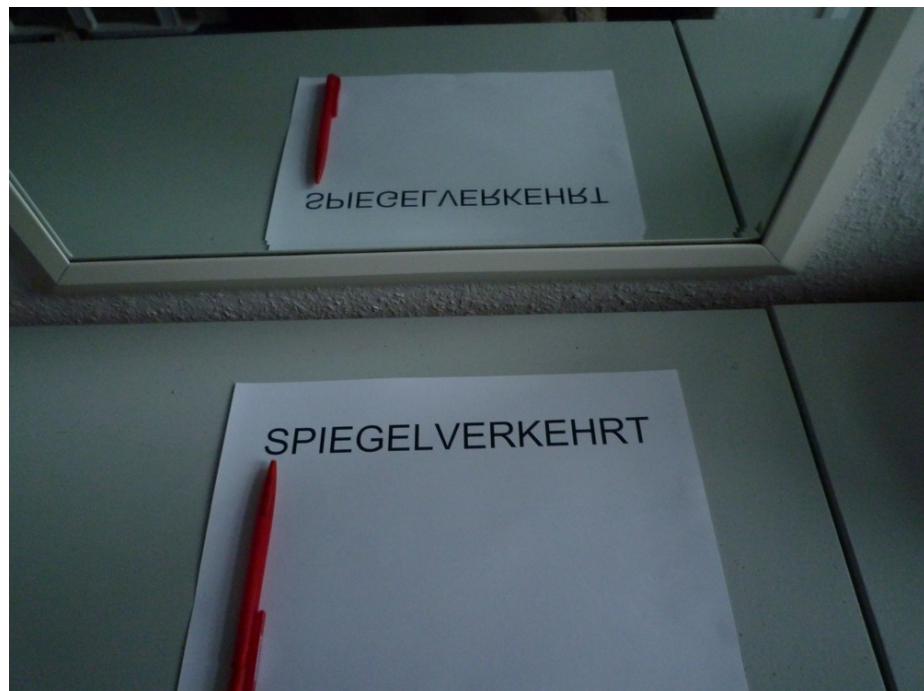


Abb. 3.3:

In Abbildung 3.3 ist recht gut zu erkennen, dass die Schrift im Spiegel schwer lesbar ist. Sie ist „spiegelverkehrt“.

Betrachten wir den roten Kugelschreiber. Er liegt im Original auf der linken Seite des Papierblattes. Und im Spiegelbild liegt er ebenfalls auf der linken Seite des Papierblattes. So, wie Sie jetzt auf beides schauen, das Original und das Spiegelbild. Es geht nicht darum - was wir schnell tun - , dass wir uns in Gedanken in die Position unseres

eigenen Spiegelbildes begeben und von dort auf das gespiegelte Blatt schauen. Dann müssten wir in der Tat sagen: „Der Kugelschreiber liegt auf der rechten Seite des Papierblattes.“ Aber diesen Positionswechsel wollen wir nicht vollziehen. Wir stehen als Beobachter vor dem Spiegel und beurteilen nur aus dieser Perspektive Original und Spiegelbild. Und wir müssen dann einsehen:

Der Spiegel vertauscht nicht rechts und links!

Denn, wie mit dem Kugelschreiber demonstriert, sehen wir, dass ein Gegenstand, der links liegt, auch im Spiegel links liegt. Links bleibt links und rechts bleibt rechts.

In Abbildung 3.3 können wir aber auch gut erkennen, was im Spiegelbild in der Tat gegenüber dem Original vertauscht ist: Vorn und hinten. Die Spitze des Kugelschreibers zeigt im Original von uns weg, im Spiegelbild auf uns zu.

Also, der Spiegel vertauscht nicht links und rechts, genau so wenig, wie er oben und unten vertauscht. D.h. die Orientierung in einer Ebene, die parallel zur Spiegelfläche ist, bleibt in jeder Richtung erhalten. Der Spiegel vertauscht vorn und hinten. D.h. die Orientierung wird in der Richtung, die senkrecht zur Spiegelebene verläuft, vertauscht.

Nun bleibt aber ein Rätsel offen: Warum ist Schrift im Spiegel schwer lesbar? Was genau wird verkehrt, wenn Schrift „spiegelverkehrt“ ist?

Wenn wir ein Blatt Papier parallel zur Spiegelebene halten mit der beschriebenen Seite zu uns, dann können wir im Original die Schrift lesen. Schauen wir über das Blatt hinweg in den Spiegel, so sehen wir durch die Reflexion des Lichts auf die leere Rückseite des Blatts. Der Spiegel kann die Schrift nicht „sehen“, da sie auf der Seite steht, die vom Spiegel abgewandt ist. Um uns den Effekt der spiegelverkehrten Schrift zu demonstrieren, muss die beschriebene Seite zum Spiegel zeigen. Wie „zeigen“ wir dem Spiegel die Schrift? Indem wir das Blatt herumdrehen. Das machen wir in 99,9% aller Fälle so, dass wir es um die senkrechte Achse drehen. Dabei wird links und rechts vertauscht, nicht aber oben und unten. Wir sind es, die links und rechts vertauschen, wenn wir da Blatt so drehen, dass die beschriebene Seite zum Spiegel zeigt und wir so über den Spiegel die beschriebene Seite betrachten - mit vertauschten Seiten.

Wäre uns geläufig, bei dem Hinwenden der beschriebenen Seite immer eine Drehung um die horizontale Achse zu machen, so würden wir die Frage stellen: „Warum vertauscht der Spiegel oben und unten, nicht aber rechts und links?“

Am direktesten erleben wir dieses Vertauschen, wenn eine Person neben uns steht und wir sie über den Spiegel betrachten. Dann sind beim Spiegelbild der Person rechts und links vertauscht, z.B. ist der Scheitel auf der „falschen Seite“ – verglichen mit dem Bild, das wir sehen, wenn die Person uns direkt gegenüber steht. Denn dann hat sie

eine Drehung um die senkrechte Achse gemacht und dabei links und rechts vertauscht.

3.2 Spiegelungen an zwei Spiegeln

Wir wollen uns in diesem Kapitel den Vorgängen am „Spiegelbuch“ zuwenden. Als Experimentiergerät versteht man unter einem Spiegelbuch zwei Spiegel, die an einer gemeinsamen Kante zusammengefügt sind und dort einen Winkel α einschließen. Obwohl nur zwei Spiegelflächen vorhanden sind, kann man je nach Größe des Winkels sehr viele Spiegelbilder sehen. Wir wollen hier analysieren, wie viele Spiegelbilder man sehen kann und wie diese im Einzelnen zu erklären sind. Dabei wollen wir uns den Dingen aus zwei Richtungen nähern:

- einmal von der rein geometrischen Seite. Dabei geht es vor allem um die Verknüpfung von Achsenspiegelungen und deren Gesetzmäßigkeiten, wie sie in Kapitel 2 behandelt wurden.
- und dann von der physikalischen Seite. Dabei wollen wir über den Verlauf des Lichtweges erklären, wie diverse Spiegelbilder entstehen.

3.2.1 Der Sonderfall $\alpha = 90^\circ$

Lässt man die beiden Spiegel des Spiegelbuches einen Winkel von 90° einschließen, so kann man folgendes Bild sehen.

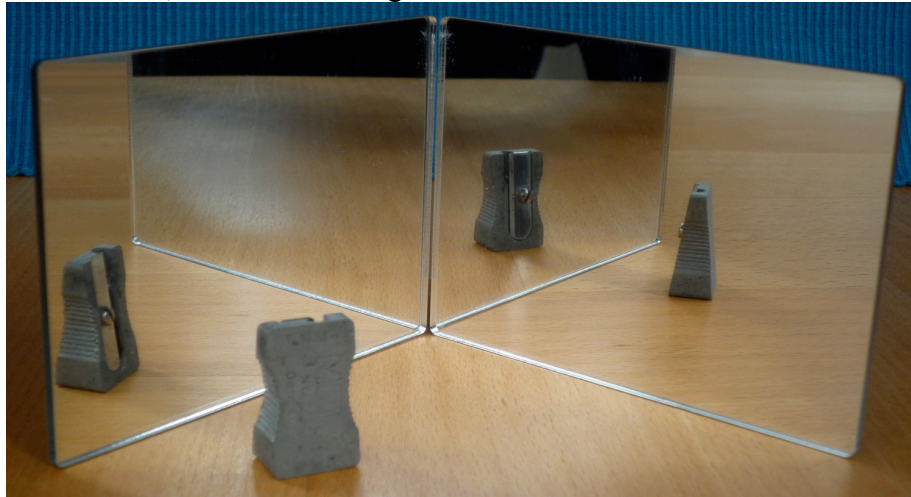


Abb. 3.4

Im Vordergrund steht das Original, zusätzlich sehen wir drei Spiegelbilder. Zwei der Spiegelbilder sind direkt erklärbar, da sie die Bilder des Originals in den beiden Spiegeln des Spiegelbuches sind. Erklärungsbedürftig ist das dritte Spiegelbild, das in der Abb. 3.4 oben in der Mitte zu sehen ist.

Wir sind schnell geneigt, dieses Spiegelbild als Bild des rechten Spiegelbildes in dem gleich danebenstehenden Spiegel zu erläutern. Aber (wird fortgesetzt)

Schauen wir uns die Situation in einer geometrischen Darstellung an. Dabei schauen wir genau von oben auf das Spiegelbuch, so dann die Spiegelflächen als Spiegelachse erkennbar sind.

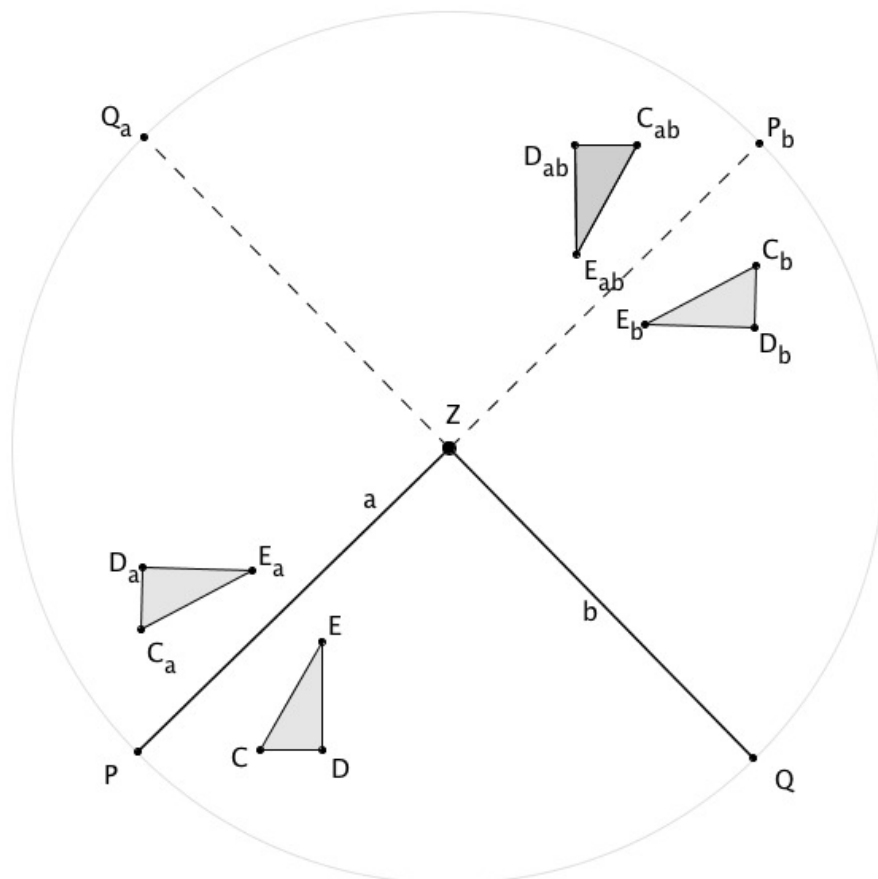


Abb. 3.5

Die beiden real vorhandenen Spiegel sind hier durch die Strecken \overline{PZ} und \overline{QZ} dargestellt. Die in der Realität gemeinsame Kante schrumpft hier auf den Schnittpunkt Z. Das Original ist das Dreieck CDE. Einfach erkennbar ist das Spiegelbild bei Spiegelung an a, das Dreieck $C_a D_a E_a$.

Dabei wollen wir hier folgende Notation für gespiegelte Punkte einführen: Ist die Achse a gegeben, so bezeichnen wir weiterhin die Achsenspiegelung an a mit S_a . Wird der Punkt P mit der Spiegelung S_a abgebildet, so verwenden wir die übliche Schreibweise für Funktionen: $S_a(P) = P_a$. Den Bildpunkt bezeichnen wir mit dem entsprechenden Index, also P_a . Konsequenter Weise ist dann P_b der Bildpunkt bei der Spiegelung an der Achse b. Bei der Verknüpfung von Spiegelungen wollen wir im Index ebenso die Reihenfolge von rechts nach links einhalten. Spiegeln wir zuerst an a und dann an b, so schreiben wir

$S_b(S_a(P)) = P_{ba}$. Entsprechend steht dann P_{ab} für den Bildpunkt, den wir erhalten, wenn P zuerst an b und dann an a gespiegelt wird.

Ebenfalls leicht einzusehen (Abb. 3.5) ist das Spiegelbild des Dreiecks CDE bei Spiegelung an b , also das Dreieck $C_bD_bE_b$. Als drittes Spiegelbild bekommen wir das Bild des Dreiecks $C_bD_bE_b$ an dem hinten stehenden Spiegel als Verlängerung von a . In unserer Notation ist das dann das Dreieck $C_{ab}D_{ab}E_{ab}$. Hierzu ergeben sich zwei Fragen:

- Ist das Dreieck $C_{ab}D_{ab}E_{ab}$ auch das Bild vom Dreieck $C_aD_aE_a$, gespiegelt an b , bzw. dessen Verlängerung?
- Wie entsteht dieses Bild genau? Denn die (im Foto) sichtbaren Spiegel hinter den Spiegeln gibt es ja nicht.

Die Frage a. wollen wir in einer geometrischen Aussage formulieren und beweisen. (wird fortgesetzt)

Die Frage b., wie denn das dritte Spiegelbild entsteht, ist eher physikalischer Natur. Wie ist der Weg des Lichts vom Gegenstand in unser Auge, so dass der Eindruck des dritten Spiegelbildes entsteht? (wird fortgesetzt)

3.2.2 Der Sonderfall $\alpha = 60^\circ$

(wird fortgesetzt)

3.2.3 Der allgemeine Fall

(wird fortgesetzt)

3.3 Gruppentheoretische Betrachtungen

3.3.1 Wiederholung des Begriffs „Gruppe“

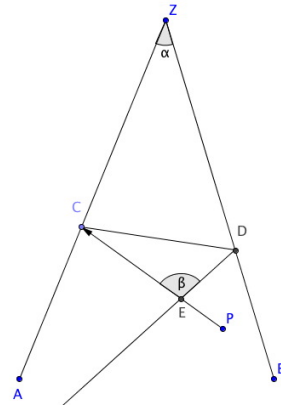
(wird fortgesetzt)

Ü

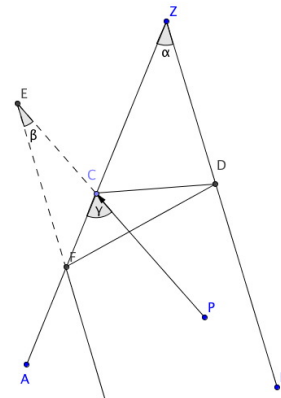
3.4 Übungen

3.4.1 Zur Geometrie am Spiegelbuch

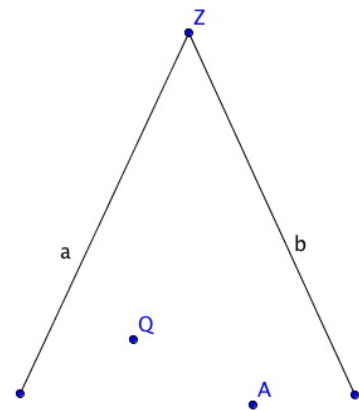
- Ein Lichtstrahl von P wird in C am Spiegel a reflektiert, in D am Spiegel b und kreuzt dann den einfallenden Lichtstrahl in E. Berechnen Sie den Winkel β in Abhängigkeit von α .



- Ein Lichtstrahl von P trifft in C unter dem Winkel γ auf den Spiegel a und wird dort reflektiert. In D wird er am Spiegel b und in E wieder an a reflektiert. Die Verlängerung des einfallenden und des ausfallenden Strahls treffen sich in E unter dem Winkel β . Berechnen Sie β in Abhängigkeit von α und γ .



- Am Spiegelbuch mit den Spiegeln a und b sind eine Lichtquelle Q und ein Auge A (jeweils als Punkt) gegeben. Konstruieren Sie den Lichtstrahl,
 - der von der Quelle Q nach einmaliger Reflexion an a in das Auge A fällt.
 - der von der Quelle Q nach Reflexion an a und dann an b in das Auge A fällt.
 - der von der Quelle Q nach Reflexion an b und dann an a in das Auge A fällt.



3.4.2 Zur Verknüpfung von Spiegelungen

4. Gegeben ist das Spiegelbuch mit den beiden Spiegeln a und b, die sich in Z berühren und einen Winkel α einschließen. Was für eine Abbildung stellen die gegebenen Spiegelungsverknüpfungen dar? Ist es eine Spiegelung, so beschreiben Sie die Lage der Spiegelachse (ggfs. mit einer Skizze). Ist es eine Drehung, so geben Sie das Drehzentrum und den Drehwinkel an.

a. $S_a \circ S_b \circ S_a$

b. $S_a \circ S_b \circ S_a \circ S_b$

c. $S_a \circ S_b \circ S_a \circ S_b \circ S_a$

5. Am Spiegelbuch gilt $S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_b \circ S_a \circ S_b \circ S_a$. Wie groß ist dann der Winkel α , den die beiden Spiegel a und b einschließen?

6. Warum ist die Gleichung $S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_b$ unsinnig?

7. Beim Spiegelbuch schließen die beiden Spiegel a und b einen Winkel $\alpha = 72^\circ$ ein. Ergänzen Sie die Verknüpfungsgleichung zu einer korrekten Aussage: $\dots \circ S_b \circ S_a = \dots \circ S_a \circ S_b$.

8. Lösen Sie die Verknüpfungsgleichungen nach S_x auf.

a. $S_b \circ S_a = S_a \circ S_x \circ S_b \circ S_a$

b. $S_b \circ S_a = S_a \circ S_x \circ S_a \circ S_b$

c. $S_b \circ S_a = S_a \circ S_b \circ S_x \circ S_a$