Dr. Reimund Albers Wintersemester 2011/12

Mathematisches Denken und Lehren 1

4. Übung

Goldener Schnitt, Fibonacci-Zahlen, Pascalsches Dreieck

Präsenzübungen (für Mi, 30.11.)

1. Summen
   Überlegen Sie für die nachfolgenden Summen die umformenden Schritte

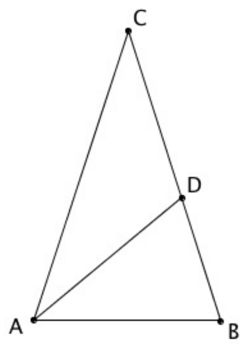
   a. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

   b. $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

   c. $\sum_{k=1}^{n} b = b \sum_{k=1}^{n} 1 = bn$

2. Zeigen Sie auf der Basis der Aufgabe 1 und der „Gaussformel" für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, dass die folgende Gleichung richtig ist:
   Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(a+k)^2 = na(a+n+1) + \sum_{k=1}^{n} k^2$

Hausübungen (Abgabe: Do, 1.12.)



3. Gleichschenklige Dreiecke
   Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC mit $|AC| = |BC|$.
   Die Strecke $\overline{AD}$ ist nun so gezeichnet, dass sowohl das Dreieck ABD als auch das Dreieck ADC gleichschenklig sind. Dabei gilt $|AB| = |AD|$ und $|AD| = |DC|$.

   a. Aus diesen Angaben sind alle Winkel in ihrer Größe bestimmt. Geben Sie sie in Grad an.

   b. Begründen Sie, dass das Dreieck ABD ähnlich ist zum Dreieck ABC.

   c. Zeigen Sie, dass D die Strecke $\overline{BC}$ im goldenen Schnitt teilt. *(Nennen Sie die Länge $|AB| = |AD| = |DC| = x$ und die Länge $|BC| = 1$. Nun müssen Sie nur noch zeigen, dass $x = \varphi$ ist.)*

4. Variation zur Fibonacci-Folge
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge
$a_{k+1} = a_k + a_{k-2}$ mit $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1.$
(Es bietet sich hier an, mit einem Computer-Rechenblatt (Excel oder Open-Office) zu arbeiten.)

a. Berechnen Sie die Folgenglieder a_1 bis a_{20}.

b. Bilden Sie fortlaufend die Quotienten $\frac{a_k}{a_{k+1}}$, $k = 1, 2, ..., 19$. Was stellen Sie über die Entwicklung der Quotienten fest?

c. Kommentieren Sie die nachfolgende Umformung Schritt für Schritt

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-2} \qquad (1)$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{a_{k-2}}{a_k} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_k}{a_{k-2}}} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} + \frac{a_{k-3}}{a_{k-2}}} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}} + \frac{a_{k-3}}{a_{k-2}}} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \qquad (6)$$

d. Formen Sie Gleichung (6) so um, dass alle Brüche verschwinden. Sie erhalten dann eine Gleichung der Form „Polynom 3. Grades = 0“.

e. Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{a_{19}}{a_{20}}$ (siehe b.) näherungsweise eine Nullstelle des Polynoms aus d. ist (*Rechnung mit Näherungszahlen mit dem Taschenrechner*).

5. Binomischer Lehrsatz

a. Wiederholen Sie, was der Binomische Lehrsatz aussagt. Schreiben Sie ihn auf. Verwenden Sie auch das Summenzeichen $\sum$.

b. Wie groß ist der Koeffizient (laut Binomischem Lehrsatz) vor a^7b^5 ? Rechnen Sie die Zahl fertig aus.

Das gute Beispiel ist nicht eine Möglichkeit, andere Menschen zu beeinflussen, es ist die einzige. Albert Schweizer