Dr. Reimund Albers Wintersemester 2011/12

Mathematisches Denken und Lehren 1

2. Übung
Fibonacci-Zahlen

Präsenzübungen (für Mi, 16.11.)

1. Logik
   Zeigen Sie mit einer Wahrheitstafel das Distributivgesetz
   $A \text{ oder } (B \text{ und } C) \Leftrightarrow (A \text{ oder } B) \text{ und } (A \text{ oder } C)$

2. Termumformungen mit Fibonacci-Zahlen
   Zeigen Sie die „Gelin-Cesàro-Identität“ $F_{n+1}^2 = 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$
   a. Rechnen Sie die Aussage konkret nach für n = 4 und n = 10.
   b. Zeigen Sie sie allgemein.
   (Nehmen Sie dazu die linke Seite und verringern Sie mit der rekursiven Definitionsgleichung für die Fibonacci-Zahlen zwei Mal den Index. Fassen Sie dann geschickt zusammen, um die rechte Seite zu erhalten.)

Hausübungen (Abgabe: Do, 17.11.)

3. Honigbiene
   Die Honigbiene unterscheidet sich von vielen anderen Tierarten durch ihr kompliziertes Fortpflanzungssystem. Es existieren drei Bienengeschlechter: die Königin, die Arbeiterin und die Drohne. Nur die Königin ist der Lage Eier zu legen. Wenn ein Ei von einer Drohne befruchtet wurde, so entwickelt sich daraus abhängig von der ihm zukommenden Pflege einer Arbeiterin oder eine Königin. Aus einem unbefruchteten Ei entspringt wieder eine Drohne.
   Somit lassen sich die Vorfahren einer Drohne mit den folgenden Regeln aufzählen.
   - Eine Drohne hat nur eine Königin als direkten Vorfahren.
   - Eine Königin hat immer eine Königin **und** eine Drohne als Vorfahren.

   a. Zeichnen Sie für eine Drohne den Stammbaum bis zur 6. Generation zurück (die Ausgangsdrohne ist die Generation 0).
   b. Wie viele Königinnen und Drohnen hat die Drohne in der n = 6. Generation als Vorfahren? Stellen Sie dann allgemein für n eine rekursive Regel auf.
   c. Wie groß war die Anzahl der Vorfahren in der 20. Generation? Verwenden Sie dazu die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen.
   d. Berechnen Sie die <u>Summe</u> der Vorfahren in den ersten 20 Generationen. Verwenden Sie dazu die Sätze aus der Vorlesung.

4. Eine Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen
Die Summe der Quadrate der ersten n Fibonacci-Zahlen ist gleich dem Produkt aus der n-ten und der (n+1)-ten Fibonacci-Zahl.

Formal: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

a. Rechnen Sie das konkret nach für n = 1, 2, ..., 6.
b. Beschreiben Sie mit einem Text, wie man bequem die Rechnung für $n = 6$ durchführen kann, wenn man die Rechnung für $n = 5$ bereits gemacht hat.
c. Zeigen Sie: $F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2}$

Die ehemalige Aufgabe 5 wird gestrichen und durch einen Spruch, passend zu den letzten Diskussionen in der Vorlesung ersetzt:

Physics is like sex: sure, it may give some practical results, but that's not why we do it.
Richard P. Feynman.

Was der Physiker Feynman über Physik sagt, gilt auch für Mathematik und ganz allgemein für die Tätigkeit von Wissenschaftlern.