3. Argumentieren und Beweisen mit Punktemustern

3.1 Figurierte Zahlen

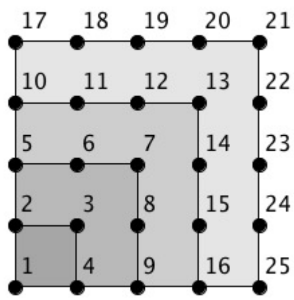
Gerade in der Grundschule bietet es sich immer wieder an, Zahlen durch Gegenstände zu verdeutlichen. Andererseits ordnet man viele, gleichartige Gegenstände zu Mustern. Bei einer mathematischen Blickweise bieten sich dazu geometrische Figuren an. Dieses führt zur Quadraten, Dreiecken oder anderen Vielecken. Diese Betrachtung führt zu den figurierten Zahlen, die in der Vergangenheit zu tragfähigen mathematischen Betrachtungen geführt haben.

3.1.1 Quadratzahlen

Bei den Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, ... denkt man zunächst an die Rechenoperation des Quadrierens und dem expliziten Bildungsgesetz für diese Zahlen. Nennt man die Folge der Quadratzahlen Q, so ergibt sich sofort:

Definition
Die Zahlenfolge Q mit dem Bildungsgesetz $Q_n = n^2$ heißt Folge der Quadratzahlen.

Die Quadratzahlen kann man aber auch mit der geometrischen Figur „Quadrat" in Verbindung bringen. Legt man Plättchen zu einem Quadrat zusammen, so erhält man immer dann ein vollständiges, wenn die Anzahl der Plättchen eine Quadratzahl ist. In der nebenstehenden Abbildung kann man die Quadratzahlen sehr gut auf der unteren Linie ablesen.



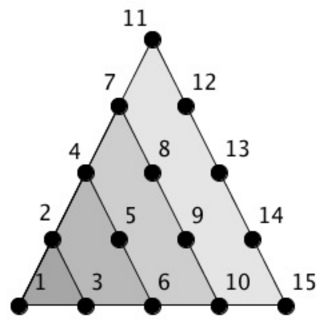
Wir wollen hier und bei allen nachfolgenden, figurierten Zahlen sowohl ein explizites als auch rekursives Bildungsgesetz herleiten. Wir betrachten dazu ein Beispiel in der obigen Figur zu den Quadratzahlen. Das dritte Quadrat kann man durch das Anlegen von vier (oben) und drei (rechts) Plättchen erweitern zum vierten Quadrat. Also finden wir $Q_4 = Q_3 + 4 + 3$. Eine Analyse der Figur legt nahe, dass auch die allgemeine Formulierung

$$Q_{n+1} = Q_n + (n+1) + n = Q_n + 2n + 1$$

richtig ist.

3.1.2 Dreieckszahlen

Analog zur Figur des Quadrats ist es naheliegend, ein Dreieck zu legen und das dann schrittweise zu vergrößern. Auch hier können wir leicht die Dreieckszahlen an der unteren Linie ablesen. Wählen wir den Buchstaben D für die Folge der Dreieckszahlen, so sehen wir:



$D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10$, $D_5 = 15$

Hier sieht man sofort den rekursiven Zusammenhang: Jedes Dreieck wird durch eine Linie von Punkten erweitert zum nächsten Dreieck. Dabei ist die Anzahl der Plättchen immer der Index des neuen Dreiecks.

Daher treffen wir folgende

Definition

Die Zahlenfolge D mit dem Bildungsgesetz $D_{n+1} = D_n + (n+1)$, $D_1 = 1$ heißt Folge der Dreieckszahlen.

Für das Auffinden der expliziten Formel bilden wir mit der rekursiven Definition die ersten fünf Dreieckszahlen, verzichten dabei aber bewusst auf das Ausrechnen der Summen.

$$D_1 = 1$$

$$D_2 = D_1 + 2 = 1 + 2$$

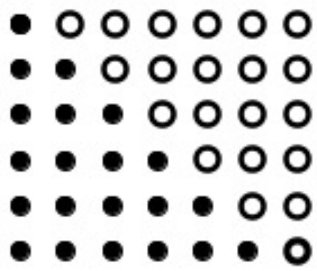
$$D_3 = D_2 + 3 = \underbrace{1+2}_{D_2} + 3$$

$$D_4 = D_3 + 4 = \underbrace{1+2+3}_{D_3} + 4$$

Man erkennt sofort, dass also die n-te Dreieckszahl die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist.

$$D_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

Das Berechnen dieser Summe ist mit einer Anekdote über Carl Friedrich Gauß verbunden. Er sollte als Grundschüler die Zahlen von 1 bis 100 addieren und soll dabei sehr systematisch vorgegangen sein. Die Grundidee können wir sehr schön mit Dreiecksmustern erläutern. Wir legen die Plättchen nicht zu einem gleichseitigen Dreieck, sondern zu einem rechtwinklig-gleichschenkligen.

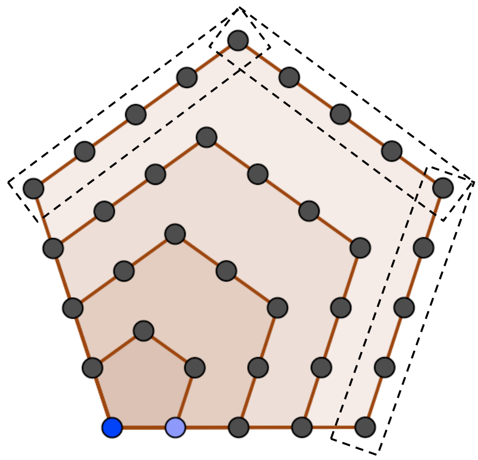


Dann kann man eine Kopie dieses Dreiecks um 180° drehen und so anlegen, dass sich beide Dreiecke zu einem rechteckigen Muster ergänzen. Die Abbildung zeigt das am Beispiel des 6. Dreiecks (D_6).

Das Rechteck, das durch die beiden kongruenten Dreiecke gebildet wird, hat die Breite 7 und die Höhe 6. Folglich gilt für dieses Beispiel: $2 \cdot D_6 = 7 \cdot 6 = 42$, also ist $D_6 = 21$. Auch dieses Beispiel lässt sich leicht verallgemeinern. Das n-te Dreieck hat eine Breite und Höhe von n Plättchen. Legt man zwei kongruente Dreiecke zusammen, so erhält man ein Rechteck der Breite n+1 und der Höhe n. Folglich gilt $2 \cdot D_n = (n+1) \cdot n$ und damit $D_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Der formale Beweis dafür wurde mit vollständiger Induktion im Kapitel 2 geführt.

3.1.3 Fünfeckszahlen

Nach den Quadrat- und Dreieckszahlen ist es naheliegend, noch andere Vielecke zu verwenden. Wir wollen uns auf die Fünfeckzahlen konzentrieren, natürlich gibt es noch Sechs- Sieben- u.s.w. Eckzahlen. Die Abbildung verdeutlicht, wie die Fünfeckszahlen anschaulich gebildet werden. Durch Abzählen findet man[1]:



$P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, $P_5 = 35$

Die Festlegung „Schaue auf die Abbildung“ reicht aber nicht aus, um weitergehende Fragen zu klären oder allgemein Eigenschaften über Fünfeckzahlen zu beweisen. Dazu müssen wir die Fünfeckszahlen formal definieren. Wir wollen hier zunächst eine rekursive Definition angeben, die sich recht einfach aus der Abbildung ergibt.

Definition

Die Zahlenfolge P mit dem Bildungsgesetz $P_{n+1} = P_n + 3n + 1$ und $P_1 = 1$ heißt Folge der Fünfeckzahlen.

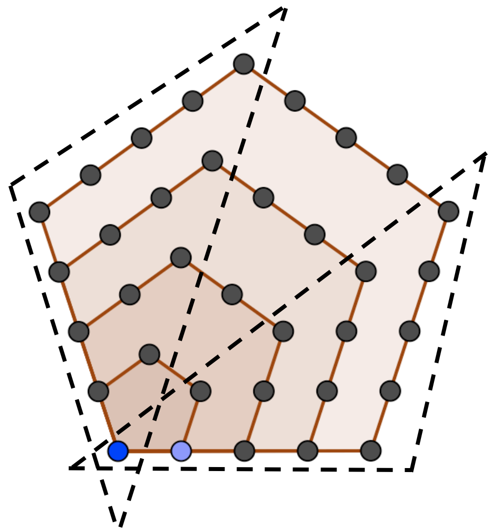
Erläuterung der Berechnungsformel in der Definition:
Zu einem Fünfeck (n) kommen zum nächsten Fünfeck (n+1) oben und rechts drei Kanten dazu, auf denen jeweils n+1 Punkte liegen.

---

[1] *Wir verwenden hier P (Pentagon), da der Buchstabe F für die Fibonacci-Zahlen vergeben ist, die an anderer Stelle der Ausbildung behandelt werden.*

Das sind 3(n+1) Punkte. Bei dieser Zählung wird allerdings der Punkt in der oberen und rechten Ecke doppelt gezählt. Daher kommen tatsächlich zwei Punkte weniger dazu. $3(n+1) - 2 = 3n + 1$
Zusätzlich lässt sich die rekursive Formel an den aus der Abbildung ermittelten ersten fünf Fünfeckszahlen testen:
$P_1 = 1$, $P_2 = 1 + 3\cdot 2 - 2 = 5$, $P_3 = 5 + 3\cdot 3 - 2 = 12$,
$P_4 = 12 + 3\cdot 4 - 2 = 22$, $P_5 = 22 + 3\cdot 5 - 2 = 35$

Die Definition der Fünfeckszahlen ist rekursiv. Im nächsten Schritt wollen wir eine explizite Formel entwickeln. Dazu teilen wir die Punkte im Fünfeck ein in drei Dreiecke. Zwei Dreiecke sind gestrichelt umrandet und sind zur n-ten Fünfeckszahl die n-ten Dreieckszahlen D_n. Das dazwischen liegende Dreieck ist gerade die n-2-te Dreieckszahl.



Somit können wir als Zwischenergebnis festhalten:

Satz
Für die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fünfeckzahlen und die Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Dreieckszahlen gilt der Zusammenhang
$$P_n = 2D_n + D_{n-2} - 1,\ \ n \in \mathbb{N}.$$
Dabei muss man hier speziell definieren $D_{-1} = D_0 = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$n = 1$: linke S. $F_1 = 1$ rechte Seite: $2\cdot 1 + 0 - 1 = 1$
$n = 2$: linke S. $F_2 = 5$ rechte Seite: $2\cdot 3 + 0 - 1 = 5$
$n = 3$: linke S. $F_3 = 12$ rechte Seite: $2\cdot 6 + 1 - 1 = 12$

Induktionsvoraussetzung: $P_n = 2D_n + D_{n-2} - 1$
Induktionsbehauptung: $P_{n+1} = 2D_{n+1} + D_{n-1} - 1$
Zusätzlich benötigen wir für die Dreieckszahlen die rekursive Definition (siehe 3.1.2): $D_n = D_{n-1} + n$

Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= \underbrace{P_n}_{Ind.Vor.} + 3(n+1) - 2 \\
&= \overbrace{2D_n + D_{n-2} - 1} + 3(n+1) - 2 \\
&= 2D_n + D_{n-2} + 3n \\
&= \left[2D_n + 2n + 2\right] + \left[D_{n-2} + n - 1\right] - 1 \\
&= 2\left(D_n + (n+1)\right) + D_{n-2} + (n-1) - 1 \\
&= 2 \quad D_{n+1} \quad + \quad D_{n-1} \quad - 1 \quad \square
\end{aligned}
$$

Da wir für die Dreieckszahlen aber eine explizite Formel $D_n = \frac{n(n+1)}{2}$ kennen, können wir aus dem gerade bewiesenen Zusammenhang sofort eine explizite Formel für die Fünfeckzahlen hinschreiben.

$$
\begin{aligned}
P_n &= 2D_n + D_{n-2} - 1 \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(2n^2 + 2n + n^2 - 3n + 2 - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3n^2 - n\right) \\
&= \frac{n(3n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Also gilt für die Fünfeckzahlen: $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

Auch dieses Ergebnis erproben wir an den ersten fünf:

$P_1 = \frac{1(3\cdot 1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $P_2 = \frac{2(3\cdot 2-1)}{2} = \frac{2\cdot 5}{2} = 5$,

$P_3 = \frac{3(3\cdot 3-1)}{2} = \frac{3\cdot 8}{2} = 12$, $P_4 = \frac{4(3\cdot 4-1)}{2} = \frac{4\cdot 11}{2} = 22$,

$P_5 = \frac{5(3\cdot 5-1)}{2} = \frac{5\cdot 14}{2} = 35$

3.2 Zahlenmuster

3.2.1 Die Hundertertafel

Ein „Spielfeld“ für gehaltvolle Aufgaben ist Hundertertafel, die an verschiedensten Stellen des Mathematiklehrens eingesetzt wird. Sie ist

den Schülerinnen und Schülern vertraut. Wir wollen hier Aufgaben auf etwas höherem Niveau behandeln.
Über das Hunderterfeld wird ein Fenster aus drei Zellen gelegt.
Wie berechnet man die Summe der drei Felder in Abhängigkeit des oberen Feldes?

	Einer									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zehner 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	21					26	27	28	29	30
3	31			34		36	37	38	39	40
4	41		43	44		46	47	48	49	50
5	51					56	57	58	59	60
6	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
7	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
8	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
9	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Bezeichnet man die Zahl im oberen Feld mit a, so ergeben sich für die anderen beiden Felder a+9 und a+10. Folglich ist die Summe 3a+19. Diese Formel verdeutlicht, dass die Summe niemals durch 3 teilbar ist.

	a
a+9	a+10

Die Aufgaben können nun in verschiedener Form variiert werden.

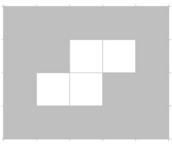
a) Drehen des Fensters

b) Nicht nur Addition, auch Subtraktion

z.B.

	+
+	−

c) Andere Form des Fensters,
das dann auch wieder gedreht werden kann.

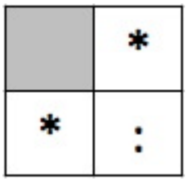


3.2.2 Die Multiplikationstafel

Ein weiteres Zahlenfeld ist die Multiplikationstafel (siehe nächste Seite). Auch hier beginnt man mit dem oben abgebildeten Dreierfenster, geht hier aber in Multiplikations- und Divisionsaufgaben. Für algebraische Übungen kann man hier fragen, wie das Produkt der drei Zahlen in den Feldern in Abhängigkeit von dem Feld rechts oben berechnet werden kann.
Nennt man den ersten Faktor (Spalte) a und den 2. Faktor (Zeile) b, so erhält man wie abgebildet die einzelnen Zahlen in den Feldern und insgesamt

	ab
(a-1)(b+1)	a(b+1)

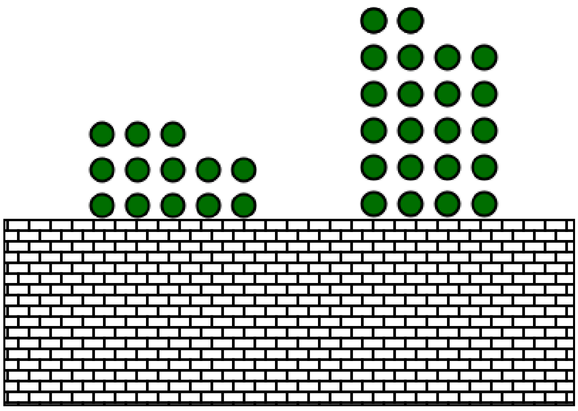
$$ab\cdot(a-1)(b+1)\cdot a(b+1)=(a-1)a^2b(b+1)^2$$



Das ist ein Vorgehen, das keine spezielle Regelmäßigkeit aufweist. Rechnet man aber mit der Division im Feld rechts unten, so ergibt sich $\frac{ab\cdot(a-1)(b+1)}{a(b+1)}=(a-1)b$. Das ist aber genau das Ergebnis in dem Feld links oben, das abgedeckt wird. Auch hier sind Variationen möglich, indem das Fenster gedreht wird bzw. andere Fensterformen verwendet werden.

	1. Faktor									
2. Faktor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

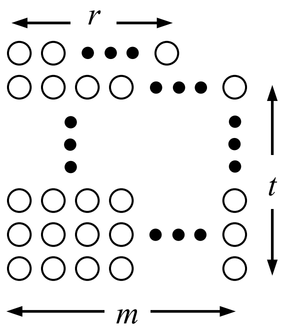
3.3 Zahlenmuster zur Teilbarkeit



Mit Punktemustern kann man sehr schön Aussagen zur Teilbarkeit veranschaulichen. Die (grundschulnahe) Idee ist dabei, dass Punktesäulen hinter einer Mauer hervorschauen. Man kennt daher nicht ihre genaue Höhe, sieht aber sehr wohl die wesentlichen Eigenschaften: die Breite und die Zahl der Punkte in der obersten Reihe.

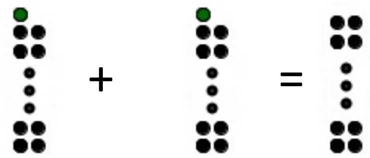
Links in der Abbildung sehen wir eine Zahl, die beim Teilen durch 5 den Rest 3 lässt und rechts eine Zahl, die beim Teilen durch 4 den Rest 2 lässt. Welche Zahlen es jeweils genau sind, bleibt offen, da wir nicht erkennen können, wie viele Punkte sich hinter der Mauer verstecken. So könnte der linke Punkteturm die Zahl 13 darstellen, aber auch 18, 23, 28, ... Entsprechend kann der rechte zur Zahl 22, 26, 30, 34, ... gehören.

Etwas nüchterner und allgemeiner stellt ein Punktemuster in der rechts dargestellten Form eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ dar, von der man weiß, dass sie beim Teilen durch m den Rest r lässt. Formal: $a = t \cdot m + r$. Diese Punktemuster werden im nächsten Kapitel die Darstellungen begleiten. Hier wollen wir an einigen Beispielen erkennen, welche Argumentationskraft in der Darstellung durch Punktemuster liegt.



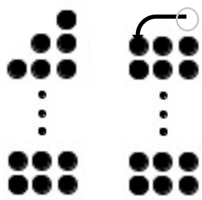
a) Gerade und ungerade Zahlen

Als eine Kontrollmöglichkeit von Rechnungen lernen die Kinder die Regel „ungerade + ungerade = gerade“ kennen. Üblicherweise verdeutlicht man diese Regel mit einigen Zahlbeispielen. Mit Punktmustern stellt sich diese Regel in der Abbildung dar. Es wird deutlich, dass die beiden Reste 1 zusammengelegt werden können zu zwei Punkten und somit den Rest 0 erzeugen.



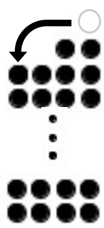
b) Teilbarkeit der Summe von aufeinander folgenden Zahlen

„Die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar“. Diese Aussage kann in Übungsaufgaben zur Addition erfahren werden. Damit hat man dann mehrere Beispiele, die diese Aussage stützen. Mit Punktemustern kann man eine fundiertere Begründung geben. Jede senkrechte Punktreihe stellt eine Zahl dar, die drei nebeneinanderliegenden stellen die drei aufeinander folgenden Zahlen dar. Legt man den Punkt rechts oben in die Lücke über der linken Spalte, erhält man eine vollständige Dreierzeile. Das neue Punktmuster stellt eine durch 3 teilbare Zahl dar.



Diese Begründung kann sehr einfach modifiziert werden. Die Summe von vier aufeinander folgenden Zahlen ist nicht durch 4 teilbar, sondern lässt stets einen Rest von 2.

Dann ist es nur noch ein kleiner Schritt zur allgemeinen Aussage:

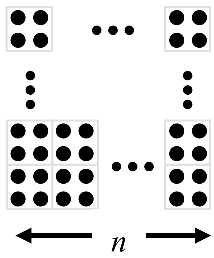


> Die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen lässt beim Teilen durch n
>
> - für gerade n einen Rest von $\frac{n}{2}$
> - für ungerade n keinen Rest. Die Summe ist also durch n teilbar.

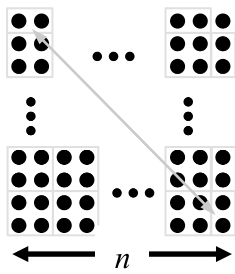
c) Teilbarkeit durch 4 von Quadratzahlen
Eine ähnlich weiterführende Aussage erhält man, wenn man Quadratzahlen auf die Teilbarkeit durch 4 untersucht. Hier weichen wir allerdings etwas von der bisher gewählten Anordnung der Punkte ab.

Eine Quadratzahl n^2 lässt beim Teilen durch 4 einen Rest von 0 oder 1 (also niemals einen Rest von 2 oder 3).

Ist n gerade, so können wir das Punktmuster von n mal n Punkten vollständig mit 4er-Rahmen überdecken. Diese haben eine Breite und Höhe von 2 und da n gerade ist, lassen diese Rahmen am Rand keinen Rest. Folglich lässt in diesem Fall n^2 beim Teilen durch 4 den Rest 0.



Ist n ungerade, so lassen die 4er-Rahmen am Rand jeweils Ränder von einer Punktzeile oder -spalte. Hier kann man immer zwei zusammenfassen und dann jeweils zwei 2er-Stäbe zu einem 4er-Quadrat. Diese Art der Zusammenfassung lässt oben rechts einen einzelnen Punkt als Rest.



3.4 Übungsaufgaben

(kommt noch)

(Die Seiten 31 bis 38 sind wegen der Umstellung noch frei)