2 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren der Mathematik, das sich vom allgemeinen Beweisverfahren abhebt.
Prinzipiell kann man beim Beweisen zwei Situationen unterscheiden. Die Menge der Elemente, auf die sich eine Aussage bezieht, ist endlich. Beispiel: „Für alle dreistelligen Zahlen gilt ...“. Da es nur endlich viele dreistellige Zahlen gibt (je nach Definition sind das 900, 999 oder 1000), kann man letztlich alle Zahlen durchprobieren und so testen, ob die spezielle Aussage gilt. Hat man dieses Überprüfen durchgeführt, ist die Aussage bewiesen. Allerdings kann dieses Vorgehen sehr mühsam sein, wenn die Anzahl der Fälle zwar endlich, aber doch sehr groß ist. Bei einer Milliarde zu prüfender Fälle kann man schwer wirklich jeden einzelnen Fall prüfen. Man kann diese Überprüfung mit einem Computer durchführen, was dann ein korrekter Beweis wäre, oder man überlegt sich trotz der endlichen Anzahl eine allgemeingültige Argumentation.
Grundsätzlich anders ist die Situation, wenn eine Aussage für eine unendlich große Bezugsmenge behauptet wird. Das finden wir schon bei recht elementaren Aussagen über alle reellen Zahlen, alle rechtwinkligen Dreiecke oder allen quadratischen Funktionen. In solchen Fällen kann das Überprüfen von endlichen vielen Beispielen einem zwar eine subjektiv empfundene Sicherheit geben, es ist aber niemals ein Beweis für die eigentliche Aussage, die sich auf unendlich viele mathematische Objekte bezieht.

2.1 Grundprinzip der vollständigen Induktion

Bei der vollständigen Induktion wird das systematische Durchprobieren aller (endlich vielen) Objekte so verallgemeinert, dass es für unendlich viele Fälle gilt. Dabei muss allerdings in der Menge der zu überprüfenden Objekte klar sein, wie sie angeordnet sind, welches nach einem überprüften Objekt das nächste ist. Das ist immer der Fall, wenn die Bezugsmenge die natürlichen Zahlen sind. Die vollständige Induktion wird daher häufig zum Beweis von mathematischen Gesetzmäßigkeiten angewendet, die Aussagen über alle natürlichen Zahlen machen.

Bsp.

Das Beweisprinzip schauen wir uns zunächst an einem Beispiel an.
Für alle mehrstelligen Zahlen gilt, dass die Quersumme kleiner ist als die Zahl selbst.
Der erste Schritt der vollständigen Induktion ist, dass man die Aussage für die kleinste Zahl nachweist, die in der Behauptung genannt wird. Die kleinste mehrstellige Zahl ist 10. Sie hat die Quersumme 1 und das ist kleiner als 10, die Zahl selbst.

Im nächsten Schritt überlegen wir uns, was wir über die Quersumme aussagen können, wenn wir eine Zahl weiterzählen.
Kommt es beim Weiterzählen nicht zu einem Übertrag, so wird die Quersumme ebenfalls um 1 größer. Beispiel: 25 $\rightarrow$ 26, die Quersumme wächst von 7 auf 8.
Kommt es beim Weiterzählen zu einem Übertrag, so ist die Quersumme der nächsten Zahl kleiner als die der Ausgangszahl. Beispiel: 39 $\rightarrow$ 40, die Quersumme fällt von 12 auf 4.
Beim Weiterzählen wird also die Quersumme ebenfalls um 1 größer oder sie wird kleiner[1].
Da nun die Quersumme am Anfang, also für 10, kleiner war als 10, können wir immer weiter Zählen und die Quersumme muss dann immer kleiner als die Zahl sein.
Damit haben wir unsere Aussage für alle (also unendlich viele) mehrstelligen Zahlen bewiesen.

Wir wiederholen nun das, was wir gerade gemacht haben, allgemeiner und in einer formalen Schreibweise.
Die vollständige Induktion kann zum Beweisen einer Aussage *A* verwendet werden, die für alle natürlichen Zahlen gelten soll oder eine Teilmenge der Form $M = \left\{ m \mid m \in \mathbb{N}_0 \ und \ m \geq m_0 \text{ mit } m_0 \in \mathbb{N}_0 \right\}$.
Unsere Behauptung ist also formal: $\forall n \in M : A(n)$
Der erste Beweisteil ist der Induktionsanfang. Wir zeigen, dass die Aussage *A* für das kleinste Element m_0 der Menge *M* erfüllt ist.
Induktionsanfang: $A(m_0)$ ist erfüllt
Der zweite, umfangreichere Beweisteil ist der Induktionsschluss, in dem nachgewiesen wird, dass man aus der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl *n* auf die Gültigkeit der Aussage für die nächste Zahl *n*+1 schließen kann.
Induktionsschluss: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
Für den Beweis dieser Implikation hat man also die Gültigkeit der Aussage für eine beliebige natürliche Zahl *n* als Vorraussetzung und die Gültigkeit der Aussage für *n*+1 als Behauptung.

Bsp.

Betrachten wir nun ein etwas formaleres **Beispiel**
Wir betrachten die Summe der ersten *n* natürlichen Zahlen, also 1+2+3+…+*n*,. Dafür gilt die Formel $1+2+....+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Diese Summenformel heißt auch gaußsche Summenformel, weil sie auf Carl Friedrich Gauß zurückzuführen ist, der diese als 9jähriger Schüler entdeckt hat.

---

[1] *Man kann sich genauer überlegen, dass bei einem Übertrag von der Einer- in Zehnerstelle die Quersumme um 8 kleiner wird. Bei zwei Überträgen fällt die Quersumme um 17. Allgemein sind es bei k Überträgen eine Verkleinerung um (k–1)·9 + 8 = 9k-1*

Die Bezugsmenge sind die natürlichen Zahlen, also $n \in \mathbb{N}$.
Der Induktionsanfang ist die Überprüfung der Formel für $n = 1$, denn 1 ist die kleinste natürliche Zahl.

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Für $n = 1$ stimmt also die aufgestellte Behauptung.
Im nächsten Schritt des Beweises muss nun nachgewiesen werden, dass das „Weiterzählen" immer fehlerfrei geschieht, dass man aus der Gültigkeit der Aussage für die Zahl n schließen kann, dass die Aussage auch für die Zahl n+1 richtig ist.
Dieser Induktionsschluss ist also der Beweis einer Implikation, bei der die Aussage für die Zahl n die Voraussetzung ist und die Aussage für die Zahl n+1 die Behauptung.
Induktionsvoraussetzung:
Es gilt $1+2+....+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Die Behauptung ist

$$1+2+....+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Für den Beweis müssen wir die Summe bis n+1 so umformen, dass sich der in der Behauptung rechts stehende Term ergibt.

$$\underbrace{1+2+3+...+n}_{\text{Summe laut Voraussetzung}}+(n+1) \qquad \text{die Induktionsvoraussetzung anwenden}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{Hauptnenner}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \qquad \frac{(n+1)}{2}\ \text{ausklammern}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \blacksquare$$

Durch den Induktionsanfang für $n = 1$ und den Induktionsschluss, der sicherstellt, dass die Summenformel für die nächst folgende natürliche Zahl auch richtig ist, ist die Summenformel für alle natürlichen Zahlen bewiesen. Denn da sie für $n = 1$ gilt, gilt sie auch für $n = 2$. Dann aber auch für $n = 3$, $n = 4$ u.s.w.

2.2 Anmerkungen zur vollständigen Induktion

a) Insbesondere für Summenformeln, aber auch noch weitere Gebiete der Mathematik ist die vollständige Induktion die Standardbeweisform. Man darf dabei aber nicht vergessen, dass die vollständige Induktion als Beweisweg häufig auch durch eine andere Beweisargumentation (direkter Beweis oder indirekter Beweis) ersetzt werden könnte. Allerdings werden diese Beweiswege dann oft umständlicher und unübersichtlicher.

b) Im Vergleich zum Induktionsanfang ist der Induktionsschluss häufig der umfangreichere und schwierigere Teil des Beweises. So könnte man in einer flüchtigen Durchführung geneigt sein, den Induktionsanfang als vernachlässigbar abzutun. Wenn der (schwierigere) Induktionsschluss gelingt, wird der (einfachere) Induktionsanfang schon richtig sein.
Folgendes Beispiel soll zeigen, dass für eine falsche Aussage die vollständige Induktion deshalb versagt, weil es keinen Induktionsanfang gibt, der Induktionsschluss sehr wohl durchführbar ist.
Zur falschen Aussage „Jede Zehnerpotenz ist durch 7 teilbar." verläuft der Induktionsschluss folgendermaßen:
Induktionsvoraussetzung: 7 ist Teiler von 10^n,
d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $10^n = 7k$
Induktionsbehauptung: 7 ist Teiler von 10^{n+1}
Beweis: $10^{n+1} = 10 \cdot 10^n$ nun können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden $= 10 \cdot 7k = 7 \cdot (10k)$
Also ist auch 10^{n+1} ein ganzzahliges Vielfaches von 7, folglich durch 7 teilbar.
Damit ist der Induktionsschluss:

7 ist Teiler von $10^n \Rightarrow$ 7 ist Teiler von 10^{n+1}

gelungen.
Der Beweis kann aber nicht abgeschlossen werden, da es keinen Induktionsanfang gibt, also kein $n \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, für das die Aussage „7 ist Teiler von 10^n " richtig ist.
c) Eine der Grundregeln bei einem direkten Beweis ist, dass man die zu zeigende Behauptung im Beweis natürlich nicht verwenden darf. Beim Beweis einer Aussage A durch vollständige Induktion sieht es so aus, als wenn man beim Beweis des Induktionsschlusses mit der Verwendung der Induktionsvoraussetzung gegen den oben genannten Grundsatz verstößt. Das ist aber nicht so.
Beim Induktionsschluss beweist man die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.
Dabei wird weder $A(n)$ noch $A(n+1)$ bewiesen, sondern mit dem Induktionsschluss beweist man, dass man korrekter Weise weiterzählen kann. Dass beim Übergang zur nächsten natürlichen Zahl $n+1$ die Aussage A nicht falsch werden kann, wenn sie für die Ausgangszahl n gültig war. Zusammen mit dem Induktionsanfang wird daraus ein vollständiger Beweis der Aussage A für alle natürlichen Zahlen größer als die Zahl, die im Induktionsanfang verwendet wurde.
d) Die vollständige Induktion kann immer dann angewendet werden, wenn eine Aussage die natürlichen Zahlen oder eine oben beschriebene Teilmenge davon als Bezugsmenge hat. Solch eine Struktur ist notwendig, da im Induktionsschluss von einer Zahl „auf die nächste" geschlossen wird. Dieses Voranschreiten muss eindeutig definiert sein, man muss wissen, wie man die nächste Zahl erhält.
Für die reellen Zahlen ist das nicht möglich, denn innerhalb der reellen Zahlen gibt es zu einer Zahl keine „nächste Zahl". Ein anderes Beispiel

ist die Menge der Primzahlen. Das ist zwar eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, aber bei den Primzahlen gibt es keinen Algorithmus, zu einer Primzahl die nächste zu ermitteln. Daher kann man Aussagen über Primzahlen nicht mit vollständiger Induktion beweisen. Ein klein wenig kniffliger ist es für die rationalen Zahlen, also die Menge aller Brüche. Denkt man an die Anordnung auf dem Zahlenstrahl, so gibt es - wie bei den reellen Zahlen - keine nächste. Man kann allerdings die rationalen Zahlen so anordnen, dass es in eindeutiger Weise eine nächste Zahl gibt. Diese Anordnung ist jedoch für algebraische Betrachtungen vollkommen ungeeignet, so dass man algebraische Aussagen über rationale Zahlen nicht mit vollständiger Induktion beweisen kann.

2.3 Induktion gegen Deduktion

Info

Unter Induktion versteht man einen Weg der Erkenntnisgewinnung, der auf einzelnen Beispielen oder Experimenten beruht. Das ist die typische Arbeitsweise in den Naturwissenschaften. Das Gravitationsgesetz beruht auf endlich vielen Messungen und hat sicher viele Bestätigungen erfahren. Die Aussage zielt aber auf alle Gegenstände, letztlich auch auf Dinge, die es heute noch gar nicht gibt. Der Schluss von einigen auf alle ist genau das, was man Induktion nennt.
Deduktion ist genau das Gegenteil. Man hat ein generelles Gesetz und leitet daraus ein spezielleres Gesetz ab oder schließt von einem Gesetz, das für sehr viele Dinge gilt, auf die Gültigkeit für nur eine Teilmenge. Der Schluss vom allgemeinen auf das Spezielle ist das, was man Deduktion nennt. Dieses ist die wesentliche Erkenntnisgewinnung in der Mathematik.
Beide Arten, Induktion und Deduktion, haben ihre Stärken und Schwächen. Beim induktiven Vorgehen in den Naturwissenschaften orientieren wir uns an der Realität, setzen uns aber der Gefahr aus, bei der Verallgemeinerung falsche Schlüsse oder Vorstellungen zu entwickeln. Beim deduktiven Schließen haben wir den Vorteil, dass sich die Wahrheit mit Sicherheit überträgt. Doch die anfängliche Basis sind die Axiome, Gedankengebilde, die oft in Bezug zur Realität stehen, was aber kein Test für ihre Wahrheit in Bezug auf die Realität ist. Albert Einstein hat diese Zwiespältigkeit folgendermaßen ausgedrückt:
Sofern sich die Gesetze der Mathematik auf die Realität beziehen, sind sie nicht gesichert; und soweit sie gesichert sind, beziehen sie sich nicht auf die Realität.
Im geschichtlichen Rückblick wird der Unterschied ebenfalls deutlich. Mathematische Sätze und Beweise der Griechen vor über 2000 Jahren sind heute noch anerkannt, da sie weiterhin wahr sind. Dagegen vertritt niemand heute mehr die Erkenntnisse und Ansichten von Aristoteles

zum Aufbau der Welt, physikalischen Grundfragen oder biologischen Vorstellungen.
Es bleibt die Frage, wie die Induktion ein anerkanntes, mathematisches Beweismittel liefern kann. Wesentlich ist das Adjektiv „vollständig“, denn durch den Induktionsanfang und den bewiesenen Schritt von n auf n+1 ist eine Gesetzmäßigkeit tatsächlich für alle Elemente der behaupteten Menge bewiesen. Diese darf sogar unendlich sein.

2.4 Übungsaufgaben

Beweisen Sie alle nachfolgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

1. Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

2. Die Anzahl der Permutationen von n Dingen ist n!.

3. Im Pascalschen Dreieck ist die Summe aller Zahlen einer Zeile immer eine Zweierpotenz.

4. Beweisen Sie die Summenformeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

a. $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$ b. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

c. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ d. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

e. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

f. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$ g. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

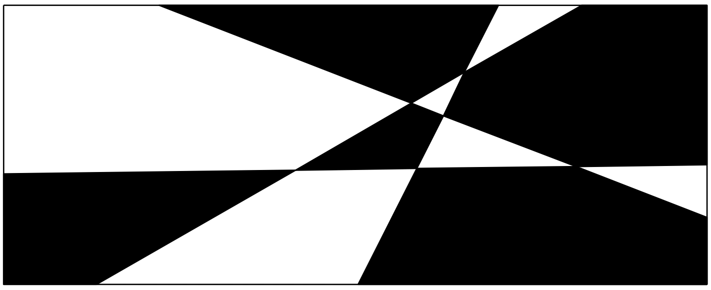
h. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ i. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

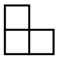
k. $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

5. In einem n-Eck ist die Anzahl aller Verbindungslinien $V(n)$ zwischen den Punkten um n größer als die Anzahl der Diagonalen $D(n)$. Kurz $V(n) = D(n) + n$.

6. Teilt man ein Rechteck durch Geraden in Teilflächen, so kann man die Teilflächen immer so durch Schwarz und Weiß färben, dass

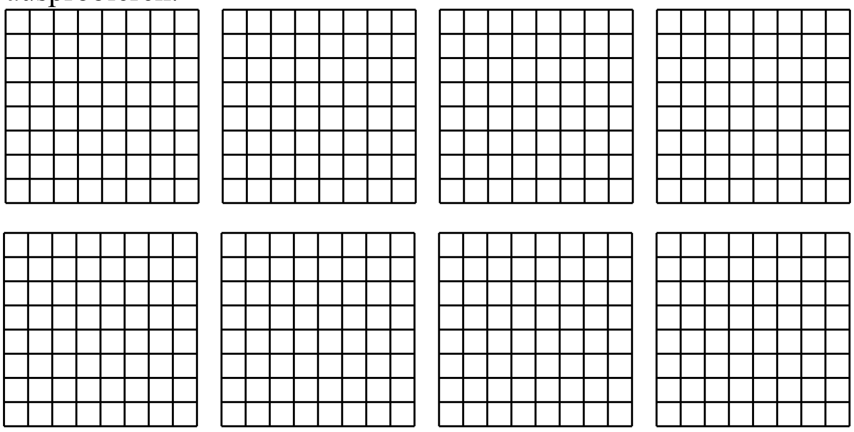
Teilflächen, die an einer Kante zusammenstoßen, verschiedene Farben haben.



7. Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 2^n. Es ist also in $\left(2^n\right)^2$ Einheitsquadrate eingeteilt. Man bedeckt irgendwo ein Einheitsquadrat mit einem Quadratstein. Nun hat man nur noch Steine aus drei Einheitsquadraten der Form 

Beweisen Sie, dass man das Quadrat (ohne das eine Einheitsquadrat) mit diesen Dreiersteinen lückenlos zudecken kann.

An den hier aufgezeichneten 8x8-Quadraten können Sie es einmal ausprobieren.



8. Hat man Aufgabe 7 gelöst, so fällt nebenbei die Eigenschaft ab:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: 3 ist Teiler von $\left(2^n\right)^2 - 1$

Beweisen Sie diese Eigenschaft rein algebraisch.