

Brüche  $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots \right\}$

Äquivalenzklassen bezüglich =

Restklassenrechnung

$m=5$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$

$m=5$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$$\bar{0} \odot \bar{3}: a = t_a \cdot 5 \quad b = t_b \cdot 5 + \cancel{3}^{\uparrow}$$

$$a \cdot b = t_a \cdot 5 \cdot (t_b \cdot 5 + \cancel{3}^{\uparrow})$$

$$= 25 t_a t_b + \cancel{15}^{\uparrow} t_a$$

$$= 5 \cdot (5 t_a t_b + \cancel{3}^{\uparrow} t_a) \in \mathbb{Z}$$

# Gruppen

Gegeben ist eine Menge  $M$   
und eine Verknüpfung  $\circ$  auf  $M$ .

D.h. Zwei Elemente von  $M$  werden  
zu einem neuen Element verkn.

Das Paar  $(M, \circ)$  heißt Gruppe,  
wenn folgende vier Bedingungen  
erfüllt sind.

1. Abgeschlossenheit

Für alle  $a, b \in M$  gilt:  $a \circ b \in M$

2. Assoziativgesetz

Für alle  $a, b, c \in M$  gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$\begin{array}{l|l} 5 \cdot 4 \cdot 3 & \\ \hline (5-4)-3 = -2 & \\ 5-(4-3) = 4 & \end{array}$$

3. Neutrales Element

Es gibt ein  $e \in M$  mit  $a \circ e = e \circ a = a$   
für alle  $a \in M$

4. Inverses Element

Für alle  $a \in M$  gibt es ein  $a^{-1} \in M$   
mit  $a \circ a^{-1} = e$

# Beispiele

Menge	Verkn.	1.	2.	3.	4.
$\mathbb{N}$	+	✓	✓	—	—
$\mathbb{N}_0$	+	✓	✓	✓	—
$\mathbb{Z}$	+	✓	✓	✓	✓
$\mathbb{N}_0$	•	✓	✓	✓	—
$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$	•	✓	✓	✓	✓
$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\oplus$	✓	✓	✓	✓
<del><math>\mathbb{Z}</math></del> -    -	$\ominus$	✓	✓	✓	✓