Vollständige Induktion

1. Beispiel Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+4+5 = 15 \qquad n=5$$

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 = 15$$

Beweis durch vollständ. Ind.

Induktionsanfang

$n=1$ linke S: 1 rechte S:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = 1 \checkmark$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Beweis:

$$\underbrace{1+2+\ldots+n}+\underbrace{n+1} = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot\left[\frac{1}{2}n+1\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{1}{2}n+\frac{2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad \boxtimes$$

q.e.d.

$$1+2+3+\ldots\ldots+98+99+100$$

101

50 Paare: $101\cdot 50 = 5050$

$1+2+3+\ldots+n$

$1+n=n+1 \quad 2+(n-1)=n+1 \quad 3+(n-2)=n+1$

$\frac{1}{2}n$ Paare (n gerade)

---

2. Beispiel

1 3 5 7 9 11 13

1 4 9 16 25 36 49

allgem.

n-te ungerade Zahl ist $2n-1$

$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

Beweis durch vollst. Induktion

Ind. Anf. $n=1$

Linke S.: 1 rechte S. $1^2=1$ ✓

Ind. Vorauss. $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$

Ind. Behaupt.: $1+3+5+\ldots+2(n+1)-1=(n+1)^2$

$+2n+1$

Beweis:

$\underbrace{1+3+5+\cdot\,(2n-1)}+(2n+1) = n^2+2n+1$

$=(n+1)^2$ q.e.d.

Das Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$$

$$=1+3+5+7=16$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

$$1+4+9+16+25=\sum_{k=1}^{5}k^2=\sum_{i=1}^{5}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{4}k^2=k^2+k^2+k^2+k^2=4k^2$$

$$\sum_{i=1}^{4}i^2=1^2+2^2+3^2+4^2$$

$$\sum_{a=1}^{3}(a+b)=(1+b)+(2+b)+(3+b)=6+3b$$

Fur alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\cancel{k}\,n+1} - 1$$

Ind. Anfang: $n=1$

Linke S. $\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^0 + 2^1 = 3$ rechte S. $2^2 - 1 = 3$

Ind. Vorauss. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Ind. Behaupt. $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$