Dr. Reimund Albers, Mathem. Denken u. Lehren 1, WiSe 11/12

13. Übung, Lösungsskizzen

1. a. $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$ für alle p Primzahl

$\binom{p}{1} = p$ für alle p Primzahl

b. $\binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7$

$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \quad \binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

7, 21 und 35 sind durch 7 teilbar

c. $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$ $p!$ enthält p genau einmal als Faktor.

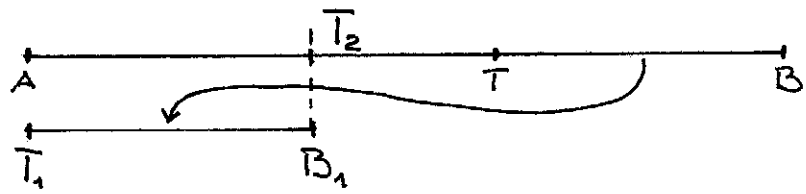
Da $k \leq p-1$ enthält $k!$ nicht den Faktor p

$k! = \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{alle sind kleiner als } p}$

Da $k \geq 1$ ist $p-k < p$. Also enthält $(p-k)!$ auch nicht den Faktor p.

Also kann das p im Zähler nicht weggekürzt werden. Da p eine Primzahl ist, kann es auch nicht teilweise gekürzt werden. („ganz oder gar nicht") Also muss p als Faktor im Endergebnis enthalten sein.

2. a.



Behauptung: T_2 teilt die Strecke $\overline{AT}$ im goldenen Schnitt.

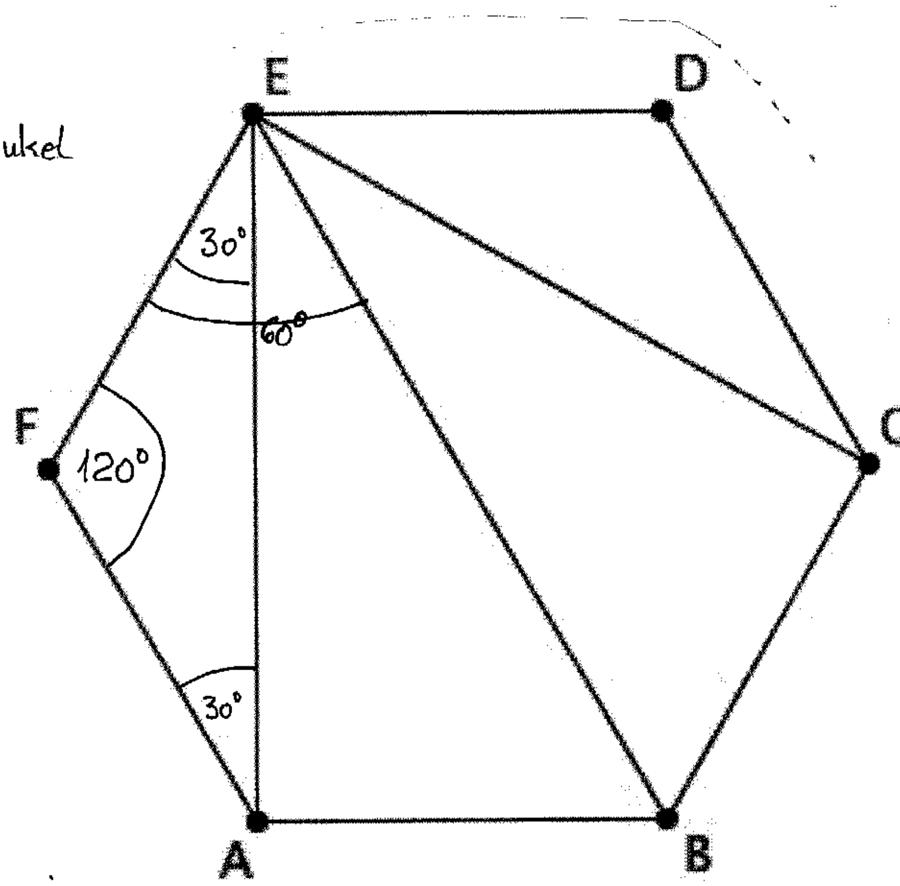
b. Vorauss. $\dfrac{|AT|}{|AB|} = \varphi = \dfrac{|TB|}{|AT|}$

Behauptung: $\dfrac{|AT_2|}{|AT|} = \varphi$

c. Beweis: $\dfrac{|AT_2|}{|AT|} = \dfrac{|TB|}{|AT|}$, da $|AT_2| = |TB|$

$= \varphi$ nach Vorauss.

3. Im Dreieck AEF kennt man den Winkel bei F mit 120°. Da es gleichschenklig ist, ergeben sich die Basiswinkel zu 30°. Die Diagonale $\overline{BE}$ halbiert aus Symmetriegründen die 120°-Winkel bei



E und B. Also sind ∢FEB und ∢EBA jeweils 60° groß. Also muss $|\measuredangle AEB| = 60° - 30° = 30°$ sein.

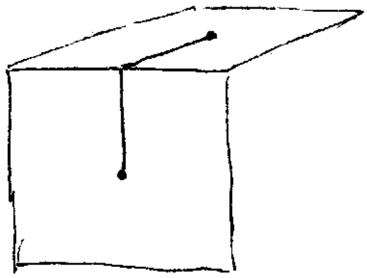
Die Dreiecke EBC und ECD sind Spiegelbilder

der Dreiecke EAB und EFA. Also sind die anderen beiden Teilwinkel bei E auch $30°$ groß.

Damit ist gezeigt, dass alle vier Teilwinkel $30°$ groß sind und damit untereinander gleich groß sind.

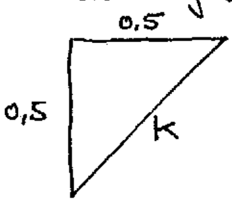
4.

a)



Wegen der Würfelkante 1 sind die Lote von einem Oktaederpunkt (= Quadratmittelpunk) auf eine Quadratkante 0,5

Dann gilt für die Oktaederkante k:



$$k^2 = 2 \cdot 0{,}5^2$$

$$\Rightarrow k = 0{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}707$$

Ein Oktaeder hat 12 Kanten, also sind alle Kanten zusammen $12 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ $\approx 8{,}49$ lang.

b) Jedes Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge $k = 0{,}5\sqrt{2}$

Dann ist $A = \frac{1}{4} k^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

Ein Oktaeder hat als Oberfläche acht Dreiecksseiten, also

$$O = 8A = \sqrt{3} \approx 1{,}732$$

5. $2346_7 \cdot 154_7$

$$\begin{array}{r}
2346 \\
15432 \\
130053 \\
\hline
435303_7
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
2 & 14 & \\
3 & 17 & 119 \\
4 & 123 & 861 \\
6 & 867 & \cancel{6069}
\end{array}$$

$2346_7 = 867_{10}$

$154_7 = 1 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 4 = 49 + 35 + 4 = 88_{10}$

$867 \cdot 88 = 76296$

stimmt

$$\begin{array}{rcrl}
76296 & = & 10899 \cdot 7 & + \; 3 \\
10899 & = & 1557 \cdot 7 & + \; 0 \\
1557 & = & 222 \cdot 7 & + \; 3 \\
222 & = & 31 \cdot 7 & + \; 5 \\
31 & = & 4 \cdot 7 & + \; 3 \\
4 & = & 0 \cdot 7 & + \; 4
\end{array}$$