Dr. Reimund Albers, Mathem. Denken 1, WiSe 11/12

12. Übung, Lösungsskizzen

1. Dreistellige Zahl: $(abc) = 100a + 10b + c$

doppelte Quersumme $2(a+b+c)$

dreifache Einerziffer $3c$

Summe $102a + 12b + 6c = 6\underbrace{(17a + 2b + c)}_{\in \mathbb{N}}$

Allgemein muss man vor jeder Ziffer als Faktor eine Zahl ~~zu~~ erhalten, die durch die betreffende Zahl teilbar ist.

z.B. Teiler 7:
$100 \to 105 = 7 \cdot 15$
$10 \to 14 = 7 \cdot 2$
$1 \to 7 = 7 \cdot 1$

also das ~~Vier~~ Fünffache der Quersumme addieren, die Zehnerziffer abziehen und ~~die~~ das Doppelte der Einerziffer addieren.

2. Ausgangszahl und Quersumme sind zueinander kongruent mod 9. Die Teilbarkeit der Quersumme kann man ebenfalls mit der Quersummenregel testen. Auch hier gilt wieder die Kongruenz mod 9.

Formal mit $Q(n)$ Quersumme von n

$n \equiv Q(n) \mod 9$

$Q(n) \equiv Q(Q(n)) \mod 9$

Wegen der Transitivität der Kongruenz gilt dann $n \equiv Q(Q(n)) \mod 9$

Das lässt sich fortsetzen, bis ~~$Q(n)$~~ $Q(Q(..Q(n)))$ eine einstellige Zahl ist.

Da die Quersumme einer natürlichen Zahl n (>0) immer größer als 0 ist, ist $Q(n)=0$ nicht möglich. Wegen $0 \equiv 9 \mod 9$ enden alle durch 9 teilbaren Zahlen bei der fortgesetzten Quersumme bei 9.

3 a $8307 : 9 = 923$

b $8703 : 9 = 967$

$+44$

Weiteres Beispiel $6228 : 9 = 692$

$6822 : 9 = 758$

$+66$

allgemeine Erläuterung

T	H	Z	E
a	b	c	d
a	d	c	b

Veränderung $-b \cdot 100 + b$
$-d + d \cdot 100$

$= d \cdot 99 - b \cdot 99$

$= (d-b)\, 99$

Teilt man die beiden so veränderten Zahlen durch 9, so ist die Veränderung im Ergebnis $(d-b) \cdot 11$

HAUSÜBUNGEN

4 a) $n + Q(n) = 2004$

n darf nicht 5-stellig oder höher sein da dann

$n \geq 10000 \Rightarrow n + Q(n) > 10000$

Angenommen n wäre 3 stellig. Dann wäre das Maximum von $n + Q(n)$ für $n = 999$ erreicht

$\Rightarrow n + Q(n) = 999 + 27 = 1026 < 2004$

<u>Also muss n 4-stellig sein.</u>

Ansatz für n: $n = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$

$$Q(n) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

$$n + Q(n) = 1001a_3 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0$$

Die Tausenderziffer a_3 kann nur 2 oder 1 sein

Fall 1: $a_3 = 2$

$$n + Q(n) = 2002 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2004 \quad | -2002$$
$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2$$

Wegen $a_2, a_1, a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ist

$a_2 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = 1$ die einzige Lösung dieser Gleichung. <u>1. Lösung $n = 2001 \quad Q(n) = 3$</u>

Fall 2: $a_3 = 1$

$$n + Q(n) = 1001 + 101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 2004$$
$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 = 1003$$

Wäre $a_2 \leq 8$, $\Rightarrow 101a_2 \leq 808$

mit $a_1 \leq 9$ und $a_0 \leq 9$ folgt

$$101a_2 + 11a_1 + 2a_0 \leq 808 + 99 + 18 = 925$$

<u>Also muß $a_2 = 9$ sein</u>

Dann gilt $11a_1 + 2a_0 = 1003 - 909 = 94$

Wegen $11a_1 = 94 - 2a_0 = 2 \cdot (47 - a_0)$ muss <u>a_1 gerade</u> sein

Fall a: $a_1 = 8 \qquad 88 + 2a_0 = 94 \Rightarrow a_0 = 3$

<u>2. Lösung $n = 1983 \quad Q(n) = 21$</u>

Fall b: $a_1 \leq 6 \qquad 11a_1 + 2a_0 \leq 66 + 2a_0 \underset{a_0 \leq 9}{\leq} 84$

Also sind für $a_1 \leq 6$ keine (weiteren) Lösungen mehr möglich.

4

4b. Vorlesung: $n \equiv x \mod 9$

$Q(n) \equiv x \mod 9$

x ist der Teilungsrest beim Teilen durch 9

$\Rightarrow n \equiv Q(n) \mod 9 \quad \Rightarrow n - Q(n) \equiv 0 \mod 9$

d.h. zieht man von einer Zahl deren Quersumme ab, so ist das Ergebnis immer durch 9 teilbar.

2004 ist aber nicht durch 9 teilbar. Also kann die Gleichung $n - Q(n) = 2004$ keine Lösung haben. (2)

5.

Zahl	Teiler	Regel			Ergebnis
5041_6	$5_{10} = 5_6$	Quersumme	$5 \mid 10$		teilbar
$4A65_{12}$	$13_{10} = 11_{12}$	altern. QS	$15 - 10 = 5_{10}$		nicht teilbar
$6B47_{15}$	$3_{10} = 3_{15}$	letzte Ziffer	$3 \nmid 7$		nicht teilbar
$284C_{15}$	$7_{10} = 7_{15}$	Quersumme	$7 \nmid 26_{10}$		nicht teilbar
4251_6	$9_{10} = 13_6$	Letzten 2 Ziffern	$9 \nmid 31_{10}$		nicht teilbar
$2A04_{11}$	$4_{10} = 4_{11}$	altern. QS	$14 - 2 = 12$	$4 \mid 12$	teilbar

(3)

6 a)

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

(2)

$$\begin{array}{r} 53 \cdot 24 \\ \hline 150 \\ 340 \\ \hline 2240 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2152 : 4 = 325 \\ \underline{20} \\ \ \ 15 \\ \ \ \underline{12} \\ \ \ \ \ 32 \\ \ \ \ \ \underline{32} \\ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

alte Rechnungen
aktuelle Aufg b)
siehe nach c)

4b

c) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Stelle durch 2 teilbar ist

- durch 3 teilbar, wenn die letzte Stelle durch 3 teilbar ist
- durch 4 teilbar, wenn die durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
- durch 5 teilbar, wenn die Quersumme durch 5 teilbar ist.
- durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer 0 ist
- durch 11 teilbar, wenn die alternierende QS durch 11 teilbar ist.

- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn die ~~Zahl~~ durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 13 teilbar ist. Das ist konkret 00, 13, 30, 43
- Eine Zahl ist durch 20 teilbar, wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist.

oder: wenn die letzten beiden Ziffern 00, 20 oder 40 sind

4

---

b) $53 \cdot 25$

$$\begin{array}{r} 150 \\ 433 \\ \hline 2333 \end{array}$$

1

$2540 : 4 = 423$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline 14 \\ 12 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

1

5

d) Die gesuchte Zahl hat die Darstellung $21abc$

Wegen der Teilbarkeit durch 10 folgt $c=0$

Damit ist die Teilbarkeit durch 2 und 3 gesichert.

Teilbarkeit durch 4 $\Rightarrow$ $(bc) = (00)$ oder (20) oder (40)

also $b = 0$ od. 2 od. 4

Teilbarkeit durch 5: QS $2+1+a+b = a+b+3$

Teilbarkeit durch 11: altern. QS $2-1+a-b = a-b+1$

Ansatz: $a-b+1=0$ und $a+b+3=5$

$\Leftrightarrow$ $a-b=-1$ und $a+b=2$

ist für gerades b nicht erfüllbar

also neuer Ansatz: $a-b=-1$ und $a+b=7_{10}$

probieren mit $b=0,2,4$ liefert $a=3$ $b=4$

Also ist 21340 eine Lösung

Suche nach allen Lösungen:

Kleinste Zahl, die alle Teilereigenschaften erfüllt

2, 3, 4, 10: 20 zusätzlich 5: 140

zusätzlich 11: $140 \cdot 11 = 1540$

addiert / subtrahiert man 1540 zur gefundenen Lösung 21340, erhält man weitere Zahlen mit den geforderten Teilbarkeitseigenschaften. Man verlässt aber das gegebene Intervall $\Rightarrow$ 21340 einzige Lösung

2