Dr. Reimund Albers, Mathem. Denken 1, WiSe 11/12

11. Übung, Lösungsskizzen

1 a 1. Abgeschlossenheit

Nicht erfüllt für $3 \cdot 3 = 9$ und $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2. Assoziativgesetz

Erfüllt, da es für die Multiplikation für Zahlen allgemein erfüllt ist.

3. Neutrales Element

Erfüllt. Die 1 ist das neutrale Element

4. Inverses Element

Erfüllt. 3 und $\frac{1}{3}$ sind zueinander invers.

2. Setzt man das allgemeine Basissystem hinter dem Komma fort, erhält man

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & b^2 & b^1 & b^0 & , & b^{-1} & b^{-2} & b^{-3} & \dots \\ & = & = & = & & = & = & = & \\ & b^2 & b & 1 & & \frac{1}{b} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b^3} & \end{array}$$

Also ist $0{,}1232_4 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{1}{256}$

$$= \frac{1 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 2}{256}$$

$$= \frac{110}{256} = \frac{55}{128} = 0{,}4296875$$

3. $7 \equiv 7 \mod 13$

$7^2 \equiv \cancel{-3}^{10} \mod 13$ denn $49 = 4 \cdot 13 - 3 = 3 \cdot 13 + 10$

$7^3 \equiv \cancel{-21}^{70} \equiv 5 \mod 13$ denn $70 = 5 \cdot 13 + 5$

$7^4 \equiv 35 \equiv 9 \mod 13$

$7^5 \equiv 50 \equiv \underline{11} \equiv -2 \mod 13$

→

mod 13 $7^6 \equiv 25 \equiv \underline{\underline{12}} \equiv -1 \mod 13$

Ab hier kann man bequem mit -1 weiterrechnen.

$7^7 \equiv -7 \equiv \underline{6} \mod 13$

$7^8 \equiv -10 \equiv \underline{\underline{3}} \mod 13$

$7^9 \equiv -5 \equiv \underline{\underline{8}} \mod 13$

$7^{10} \equiv -9 \equiv \underline{4} \mod 13$

$7^{11} \equiv \underline{2} \mod 13$

$7^{12} \equiv \underline{\underline{1}} \mod 13$

Ab hier kann man bequem mit 1 weiterrechnen.

Man bestimmt den Teilungsrest des Exponenten bezüglich 12 und kann darüber schnell den Teilungsrest bestimmen.

HAUSÜBUNGEN

4 a. $\left.\begin{matrix} 27 \\ 54 \end{matrix}\right\}$ sind durch 27 teilbar, haben aber die Quersumme 9. und 9 ist nicht durch 27 teilbar. (1)

b. 1899 hat die Quersumme 27, ist aber nicht durch 27 teilbar $1899 = 70 \cdot 27 + 9$ (1)

c. $10 \equiv 10 \mod 27$

$100 \equiv 19 \equiv -8 \mod 27$

$1000 \equiv 1 \mod 27$ (1)

Also bekommt man für die gewichtete Quersumme folgendes Schema

...	M	HT	ZT	T	H	Z	E
...	1	−8	10	1	−8	10	1

(1)

d. $9.1\ 2\ 4.1\ 4\ 5$ ← Zahl

$1\ \ -8\ \ 10\ \ 1\ \ -8\ \ 10\ \ 1$ ← Gewichte

$9-8+20+4-8+40+5$ ← gewichtete QS

$= 78-16 = 62 = 2\cdot 27+8$

Die Zahl 9.124.145 ist nicht durch 27 teilbar. (1)

e. $1\ 2\ 6.\ x\ 7\ 4$ Zahl

$-8\ \ 10\ \ 1\ \ -8\ \ 10\ \ 1$ Gewichte

$-8+20+6-8x+70+4$ gew. QS

$= 100-8-8x = 92-8x$

Systematisches Probieren

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$92-8x$	92	84	76	68	60	52	44	36	28	20

Für die zehn möglichen Ziffern erhält man keine gewichtete QS, die durch 27 teilbar ist. (2)

5 a. $2^6 = 64 = 9\cdot 7+1$ also $2^6 \equiv 1 \mod 7$ (1)

b. $p = 8$ ist keine Primzahl

$2^7 = 128 \equiv 0 \mod 8$ (1)

c. $8^8 \equiv 1 \mod 9$ also $p = 9$ <u>nicht</u> prim

$b = 8$ (1)

allgemein: p ungerade, aber nicht prim

$\Rightarrow p-1$ gerade

da $p-1 \equiv -1 \mod p$

$\Rightarrow (p-1)^{p-1} \equiv 1 \mod p$

also auch $14^{14} \equiv 1 \mod 15$, aber auch $4^{14} \equiv 1 \mod 15$

$11^{14} \equiv 1 \mod 15$

d. Da 17 eine Primzahl ist, gilt

$13^{16} \equiv 1 \mod 17$ Quadriert man beide Seiten

$(13^{16})^2 = 13^{2\cdot 16} \equiv 1 \mod 17$ Ebenso gilt für $n \in \mathbb{N}$

$13^{n\cdot 16} \equiv 1 \mod 17$

Für die Aufgabe $13^{1625} \equiv x \mod 17$

zerlegt man $1625 = 1616 + 9 = 101 \cdot 16 + 9$

Also $13^{1625} = 13^{1616} \cdot 13^9 = (13^{16})^{101} \cdot 13^9$

$\equiv 1 \cdot 13^9 \mod 17$

Taschenrechner: $13^4 \equiv 1 \mod 17$

Also $13^9 = 13^4 \cdot 13^4 \cdot 13 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 13 \mod 17$

Antwort $\underline{\underline{13^{1625} \equiv 13 \mod 17}}$ (2)

6. a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\cdot 9$	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Von Schritt zu Schritt nimmt die Zehnerzahl um 1 zu und die Einerzahl um 1 ab.

Denn $+9 = +10 - 1$

Die Quersumme ist immer gleich, nämlich 9 (1)

b) 8er:

	1	2	3	4	5	6	7
$\cdot 7$	7	16	25	34	43	52	61

Auch hier nimmt die rechte Ziffer (8er-Stelle) um 1 zu, die Einerstelle um 1 ab.

Die Quersumme ist immer 7 (2)

6c.

b-System $\cdot(b-1)$

Faktor	b	1
1		$(b-1)$
2	1	$(b-2)$
3	2	$(b-3)$
…	…	…
$b-2$	$b-3$	2
$b-1$	$b-2$	1

$2\cdot(b-1) = 2b-2 = 1\cdot b + (b-2)$

$3\cdot(b-1) = 3b-3 = 2\cdot b + (b-3)$

$(b-2)(b-1) = b^2-3b+2 = (b-3)\cdot b + 2$

$(b-1)(b-1) = b^2-2b+1 = (b-2)\cdot b + 1$

Auch hier sieht man, dass die linke Ziffer immer um 1 wächst, d.h. $+b$. Die rechte Ziffer (Einer) nimmt um 1 ab, d.h. -1.
Die Quersumme ist immer $b-1$.

2

A4	A5	A6	Σ
7	5	5	17