Dr. Reimund Albers, Mathem. Denken u. Lehren 1, WiSe 11/12

8. Übung, Lösungsskizzen

1. a.

$278 \cdot 7 = 1946$ $\qquad$ $194 - 2 \cdot 6 = 182$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $18 - 2 \cdot 2 = 14$

$925 \cdot 7 = 6475$ $\qquad$ $647 - 2 \cdot 5 = 637$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $63 - 2 \cdot 7 = 49$

$876 \cdot 7 = 6132$ $\qquad$ $613 - 2 \cdot 2 = 609$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $60 - 2 \cdot 9 = 42$

$783 \cdot 7 = 5481$ $\qquad$ $548 - 2 \cdot 1 = 546$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $54 - 2 \cdot 6 = 42$

b.

$528 \cdot 7 + 2 = 3698$ $\qquad$ $369 - 2 \cdot 8 = 353$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $35 - 2 \cdot 3 = 29$

$246 \cdot 7 + 3 = 1725$ $\qquad$ $172 - 2 \cdot 5 = 162$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $16 - 2 \cdot 2 = 12$

$613 \cdot 7 + 5 = 4296$ $\qquad$ $429 - 2 \cdot 6 = 417$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $41 - 2 \cdot 7 = 27$

c. Die Rechnung führt zu immer kleineren Zahlen. So kann man immer leichter entscheiden, ob das Ergebnis durch 7 teilbar ist. Denn die Rechnung führt von einer (nicht) durch 7 teilbaren Zahl zu einer (nicht) durch 7 teilbaren. Landet man bei einer durch 7 teilbaren Zahl (siehe a.), so ist auch die Ausgangszahl durch 7 teilbar.
Aber auch umgekehrt bleibt man bei nicht durch 7 teilbaren Zahlen, wenn man mit einer nicht durch 7 teilbaren Zahl startet.

Beispiel:

$$43916 \longrightarrow 4379 \longrightarrow 419 \longrightarrow 23$$

$= 6273 \cdot 7 + 5$ $\quad = 625 \cdot 7 + 4$ $\quad = 59 \cdot 7 + 6$ $\quad = 3 \cdot 7 + 2$

Allerdings sind Ausgangszahl und Rechenergebnisse nicht kongruent mod 7.

d. In der Stellenwerttafel

....	1000	100	10	1
....	d	c	b	a
			$-2a$	$-a$

Den Vorgang „letzte Stelle streichen und von der neuen Zahl ~~das~~ das Doppelte der gestrichenen Ziffer abziehen" bewirkt, dass man von der Ausgangszahl $21 \cdot a$ (a letzte Ziffer) abzieht. Ist die Ausgangszahl durch 7 teilbar, so ist auch (Ausgangszahl $- 21a$) durch 7 teilbar. Diese Zahl endet auf Null. Folglich muss die Zahl ohne Null durch 7 teilbar sein.

erstes Beispiel aus a.

$$\begin{array}{r} 1946 \\ - \underline{126} \\ 1820 \end{array}$$

Man zieht $21 \cdot 6 = 126$ ab

$126 = 18 \cdot 7$

182 ist durch 7 teilbar, $= 26 \cdot 7$

Formaler Beweis

Die Ausgangszahl c kann man zerlegen in $c = 10b + a$ wobei a die Einerziffer und b die Zahl aus den weiteren Ziffern ist. Die Rechenanweisung führt dann auf die neue Zahl $c' = b - 2a$

Behauptung: $c = 10b + a$ ist durch 7 teilbar $\Longleftrightarrow$

$c' = b - 2a$ ist durch 7 teilbar

Beweis (Wegen der Äquivalenz müssen beide Richtungen gezeigt werden)

„$\Rightarrow$" Vorauss. ist: $c = 10b + a$ ist durch 7 teilbar

d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit: $10b + a = 7k$

$\Rightarrow$ $a = 7k - 10b$ Einsetzen in $c' = b - 2a$

$$c' = b - 2(7k - 10b) = b - 14k + 20b = 21b - 14k$$

$$= 7\underbrace{(3b - 2k)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Also ist auch c' durch 7 teilbar. $\square$

„$\Leftarrow$" Vorauss. ist: $c' = b - 2a$ ist durch 7 teilbar

d.h. es gibt ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $b - 2a = 7t$

$\Rightarrow$ $b = 7t + 2a$ Einsetzen in $c = 10b + a$

$$c = 10(7t + 2a) + a = 70t + 20a + a = 70t + 21a$$

$$= 7\underbrace{(10t + 3a)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Also ist auch c durch 7 teilbar. $\square$

2. a. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ $\quad a, c \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}$

gleichnamig

b. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot k}{b \cdot k}$ $\quad a \in \mathbb{Z},\ b, k \in \mathbb{N}$

c. $\dfrac{a}{b} \cdot k = \dfrac{a \cdot k}{b}$ $\quad a, k \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}$

d. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\quad a, c \in \mathbb{Z},\ b, d \in \mathbb{N}$

e. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} \left(= \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c} \right)$ $\quad a \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

nach d. $\quad b, d \in \mathbb{N}$

4. Alle Lösungs„vierlinge" (a, b, c, d) mit $a^2+b^2+c^2+d^2=2012$ sind (systematische Suche mit Tabellenkalkulation mit $a \geq b \geq c \geq d$. Da 2012 durch 4 teilbar ist, sind alle vier Zahlen a, b, c, d gerade ($4 \times$ Teilungsrest 0 (mod 4)) oder ungerade ($4 \times$ Teilungsrest 1 (mod 4))).

44	6	6	2	
1936	36	36	4	2012
43	9	9	1	
1849	81	81	1	2012
42	14	6	4	
1764	196	36	16	2012
42	12	10	2	
1764	144	100	4	2012
41	15	9	5	
1681	225	81	25	2012
41	13	9	9	
1681	169	81	81	2012
39	21	7	1	
1521	441	49	1	2012
39	21	5	5	
1521	441	25	25	2012
39	19	11	3	
1521	361	121	9	2012
39	17	11	9	
1521	289	121	81	2012
38	18	12	10	
1444	324	144	100	2012
37	25	3	3	
1369	625	9	9	2012
37	21	11	9	
1369	441	121	81	2012
36	26	6	2	
1296	676	36	4	2012
36	22	14	6	
1296	484	196	36	2012
36	18	14	14	
1296	324	196	196	2012
35	27	7	3	
1225	729	49	9	2012
35	25	9	9	
1225	625	81	81	2012
35	21	15	11	
1225	441	225	121	2012
34	28	6	6	
1156	784	36	36	2012
34	26	12	6	
1156	676	144	36	2012
33	29	9	1	
1089	841	81	1	2012
33	27	13	5	
1089	729	169	25	2012
33	25	17	3	
1089	625	289	9	2012
33	23	15	13	
1089	529	225	169	2012
31	31	9	3	
961	961	81	9	2012

5. Es gibt zwei Sorten Dreiecke:

i) Dreiecke, die genau an einer Fünfeckkante liegen.
12 Fünfecke => 60 Fünfeckkanten
=> 60 Dreiecke der Sorte i)

ii) Dreiecke, die zwischen Ecken von drei Fünfecken liegen
12 Fünfecke => 60 Ecken
$60:3=20$ Dreiecke der Sorte ii)

Also gibt es $60+20=$ <u>80 Dreiecke</u>

Damit gibt es $12 \cdot 5 + 80 \cdot 3 = 300$ Flächenkanten, also $300:2=$ <u>150 Körperkanten</u>

<u>2. Lösung:</u> Um jedes Fünfeck gibt es einen Kranz aus 15 Dreiecken. Davon werden 10 doppelt gezählt: $10 \cdot 12 : 2 = 60$ und 5 dreifach $5 \cdot 12 : 3 = 20$

Also gibt es $60+20=80$ Dreiecke