Dr. Reimund Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 11/12

7. Übungen, Lösungen

1. a. Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)

Es gibt für die Parkettierung eine globale Lösung
$\Rightarrow$ Alle (drei) Vielecke haben eine gerade Eckenz.
oder die anderen beiden Vielecke haben die gleiche Eckenzahl

b. Verneinung (A und $\neg B$)

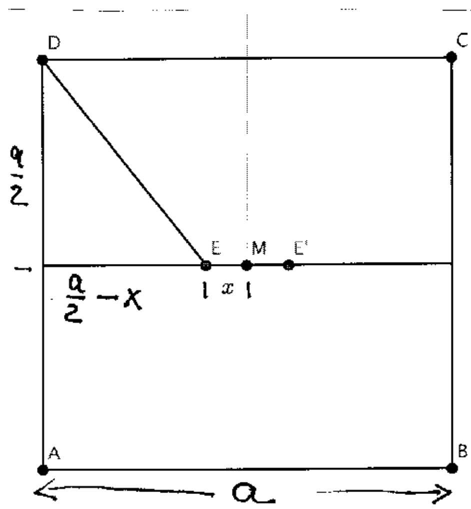
Ein Vieleck hat eine ungerade Eckenzahl und die anderen beiden Vielecke haben eine unterschiedliche Eckenzahl und (trotzdem) gibt es eine globale Lösung.

2. a) Für den Winkel in der Ecke eines regelmäßigen Vielecks gilt: $\gamma = 180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right)$
Das wird für das a, b, c und d-Eck angewendet und die Summe muss dann 360° ergeben.

b)
$$180^\circ\left(1-\frac{2}{a}\right) + 180^\circ\left(1-\frac{2}{b}\right) + 180^\circ\left(1-\frac{2}{c}\right) + 180^\circ\left(1-\frac{2}{d}\right) = 360^\circ \quad \Big| :180^\circ$$
$$\left(1-\frac{2}{a}\right) + \left(1-\frac{2}{b}\right) + \left(1-\frac{2}{c}\right) + \left(1-\frac{2}{d}\right) = 2 \quad \Big| \text{zusammenf.}$$
$$4 - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} - \frac{2}{d} = 2 \quad \Big| -4$$
$$-\frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} - \frac{2}{d} = -2 \quad \Big| :(-2)$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

c) Einsetzen, linke Seite
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60} = \frac{57}{60} < 1$$

HAUSÜBUNGEN



3. $|DE|$ berechnen über Satz v. Pythagoras

$$|DE|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$
$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2x\frac{a}{2} + x^2$$
$$= \frac{a^2}{2} - ax + x^2 \quad (1)$$

Aus der Bedingung $|DE| = |EE'|$ folgt $|DE|^2 = |EE'|^2 = 4x^2$ (1)

Also: $4x^2 = \frac{a^2}{2} - ax + x^2$ | alles nach links

$$3x^2 + ax - \frac{a^2}{2} = 0 \quad |:3$$
$$x^2 + \frac{a}{3}x - \frac{a^2}{6} = 0 \quad | \text{ Lösungsformel}$$
$$x = -\frac{a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{6}}$$
$$x = -\frac{a}{6} \pm \frac{a}{6}\sqrt{7} \quad (1)$$

Geometrisch sinnvoll ist nur die +-Lösung

$$\underline{x} = -\frac{a}{6} + \frac{a}{6}\sqrt{7} = \underline{\frac{\sqrt{7}-1}{6}\, a \approx 0{,}274\, a} \quad (1)$$

Probe ohne Näherungszahlen

Dann ist

$$|DE|^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{\sqrt{7}-1}{6}a^2 + \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{36}a^2$$
$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}\sqrt{7}a^2 + \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{36}(7 - 2\sqrt{7} + 1)a^2$$
$$= \quad -\text{"}- \quad + \frac{2}{9}a^2 - \frac{1}{18}\sqrt{7}a^2$$
$$= \left(\frac{9}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{18}\right)a^2 - \left(\frac{3}{18} + \frac{1}{18}\right)\sqrt{7}a^2$$
$$= \frac{8}{9}a^2 - \frac{2}{9}\sqrt{7}a^2 = \frac{2}{9}(4 - \sqrt{7})a^2$$

stimmt

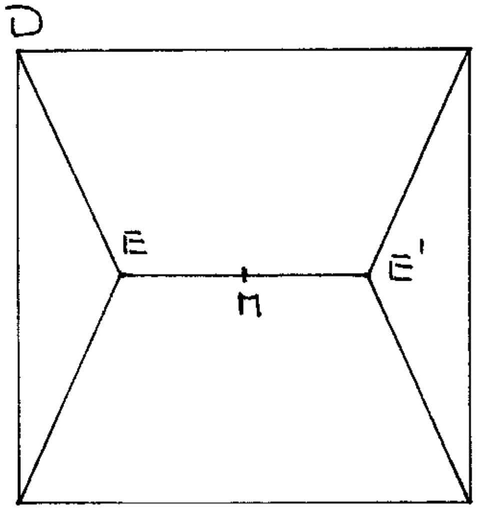
$$4x^2 = 4\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{36}a^2 = \frac{1}{9}(7 - 2\sqrt{7} + 1)a^2 = \frac{2}{9}(4 - \sqrt{7})a^2$$

Zeichnung für $a = 6\,cm$

$x \approx 1{,}65\,cm$

$|EE'| \approx 3{,}3\,cm$

$|DE| \approx 3{,}3\,cm$



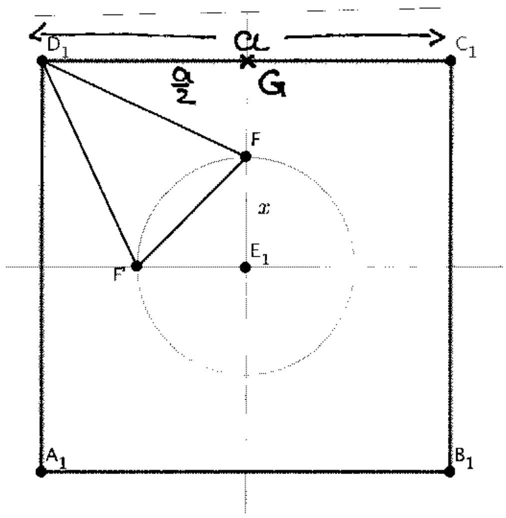
(2)

4. Bedingung ist

$|F'F| = |FD_1|$

Beide Strecken werden durch x und a bestimmt

$|F'F|^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ (1)



$|D_1F|^2 = |FG|^2 + |GD_1|^2$

$= \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$= \frac{a^2}{4} - ax + x^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$ (1)

Bedingung quadriert $|F'F|^2 = |FD_1|^2$

$2x^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{2}$ | alles nach links

$x^2 + ax - \frac{a^2}{2} = 0$ | Lösungsformel

$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (1)

Nur die +-Lösung ist geometrisch sinnvoll

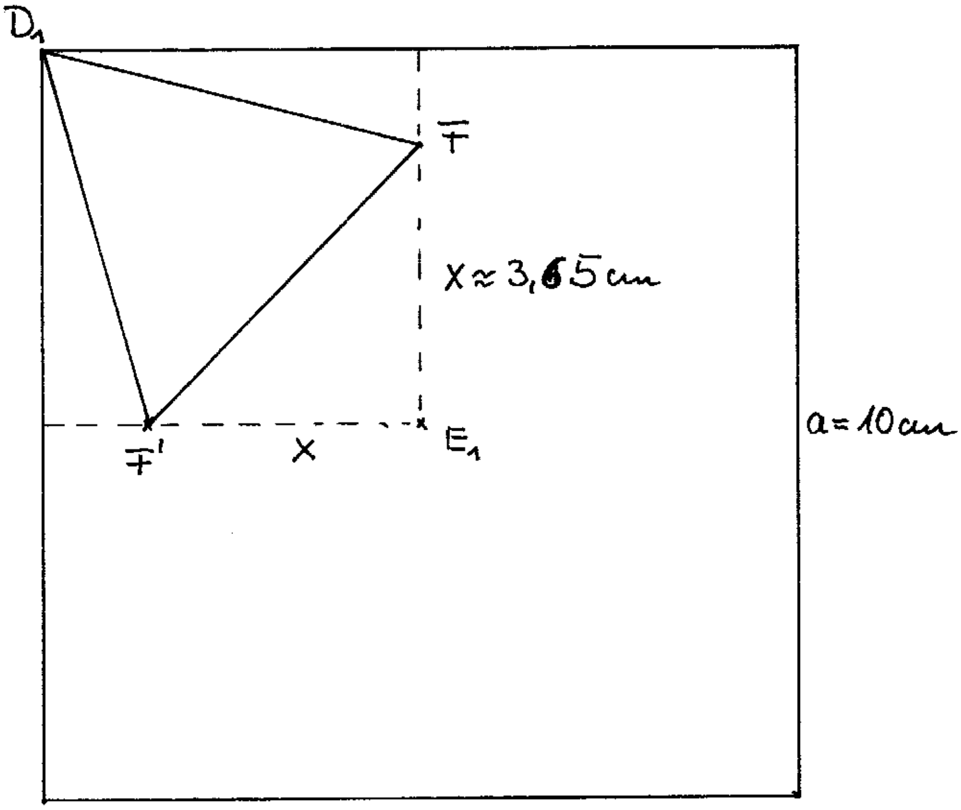
$x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}366\,a$ (1)

Probe (Rechnung mit Näherungszahlen, Taschenrechner)

$|F'F| = \sqrt{2}\,x \approx 0{,}5176\,a$

$|D_1F| = \sqrt{x^2 - ax + \frac{a^2}{2}} \approx \sqrt{0{,}366^2 - 0{,}366 + 0{,}5}\,a \approx 0{,}5176\,a$

Zeichnung für $a = 10\,\text{cm}$



2

c) Berechnung der Dreiecksfläche

$A = \frac{1}{4} c^2 \sqrt{3}$ (siehe Aufg 5)

mit $c = \sqrt{2}\,x$, also $c^2 = 2x^2$

$A = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left[\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4}(3 - 2\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}$

$= \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} - \frac{3}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 (2\sqrt{3} - 3)$

$A \approx 0{,}116\, a^2$ Da die Quadratfläche a^2 ist, nimmt das Dreieck etwa 11,6% der Quadratfläche ein.

2

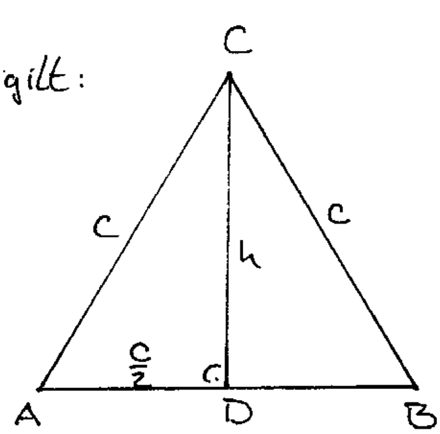
5. Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt:

$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2$

$h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4} c^2$

$h = \frac{1}{2} c \sqrt{3}$

1



mit $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$

$$= \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sqrt{3}$$ 1

6. <u>Ecken:</u> Die 8 Ecken des Würfels bleiben erhalten. Über jeder der 6 Würfelflächen wird eine Ecke konstruiert.

$\Rightarrow 8 + 6 = 14$ Ecken 1

<u>Flächen:</u> über jede der 6 Würfelflächen wird ein Dach aus 4 Dreiecken gebaut.

$\Rightarrow 6 \cdot 4 = 24$ Flächen 1

<u>Kanten:</u> Die 12 Würfelkanten bleiben erhalten. Dazu kommen pro „Dach" 4 Kanten.

$\Rightarrow 12 + 6 \cdot 4 = 36$ Kanten

oder: Die 24 Flächen sind alles Dreiecke. Also gibt es $24 \cdot 3 = 72$ Flächenkanten

$\Rightarrow 72 : 2 = 36$ Kanten (des Körpers) 1

Kontrolle mit Eulerschem Polyedersatz

$E + F = 14 + 24 = 38$

$k + 2 = 38$ stimmt

A3	A4	A5	A6	Σ
6	8	2	3	19