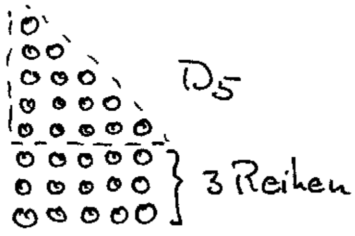
Dr. Reimund Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 11/12

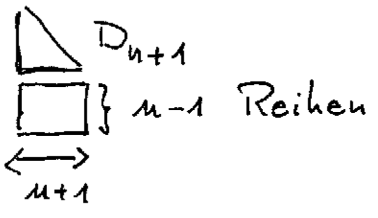
6. Übung, Lösung

1. Analyse

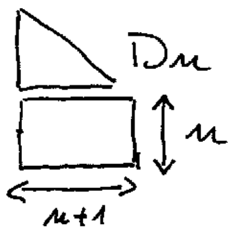
a)



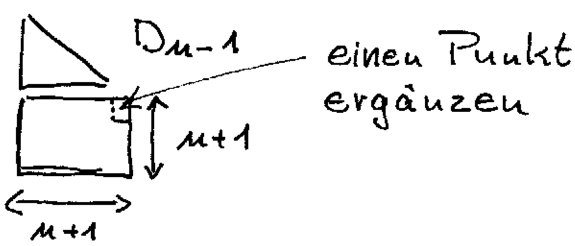
b) s.o. Danach hat man auf der Stufe n



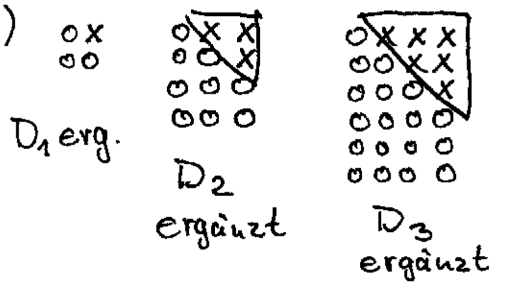
ODER



ODER

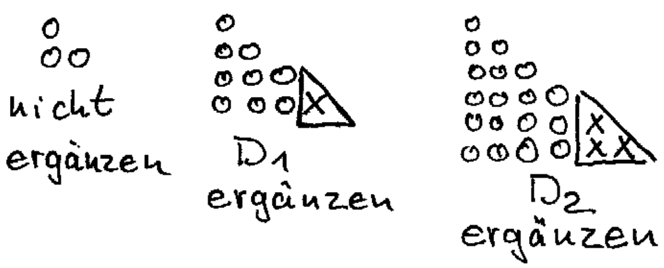


c) i)



allgemein
Man ergänzt D_n und erhält ein Rechteck mit der Breite $n+1$ und Höhe $2n$

ii)



→

noch c) ii) allgemein

Auf der Stufe n ergänzt man das Muster durch ein Dreieck mit Basis $n-1$ und erhält ein Dreieck mit der Basis $2n$.

d)

1. Analyse

$$M_n = D_{n+1} + (n+1)(n-1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + (n+1)(n-1)$$
$$= (n+1)\left[\frac{1}{2}n + 1 + n - 1\right] = \frac{3}{2}n(n+1)$$

2. Analyse

$$M_n = D_n + (n+1)\,n$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)n$$
$$= (n+1)\left[\frac{1}{2}n + n\right] = \frac{3}{2}n(n+1)$$

3. Analyse

$$M_n = D_{n-1} + (n+1)^2 - 1$$
$$= \frac{1}{2}(n-1)n + (n+1)^2 - 1$$
$$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n^2 + 2n + 1 - 1$$
$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Ergänzung c) i)

$$M_n = (n+1)\cdot 2n - D_n$$
$$= (n+1)\cdot 2n - \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= (n+1)\left[2n - \frac{1}{2}n\right] = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Ergänzung c) ii)

$$M_n = D_{2n} - D_{n-1}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(2n+1) - \frac{1}{2}(n-1)n$$
$$= 2n^2 + n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

Probe der Formel $M_n = \frac{3}{2} n(n+1)$

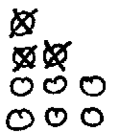
mit den ersten drei Beispielen

$n=1: \quad M_1 = \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 2 = 3$ ✓

$n=2: \quad M_2 = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot 3 = 9$ ✓

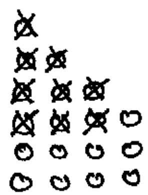
$n=3: \quad M_3 = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot \cancel{4}^{2} = 18$ ✓

e) 1. Figur (x) in 2. Figur O



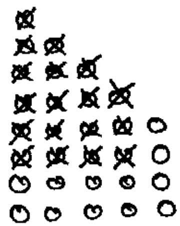
plus $2\cdot 3$

2. Figur (x) in 3. Figur O



plus $2\cdot 4+1$

3. Figur in 4. Figur



plus $2\cdot 5+2$

Also Vermutung

$$M_{n+1} = M_n + 2\cdot(n+2) + (n-1)$$
$$= M_n + 3n + 3$$
$$= M_n + 3(n+1)$$

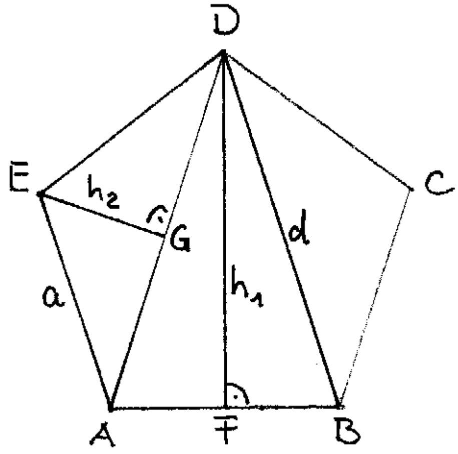
Probe mit den ersten vier Beispielen

$M_1 = 3 \quad M_2 = 9 \quad M_3 = 18 \quad M_4 = 30$

$+6 = 3\cdot 2 \qquad +9 = 3\cdot 3 \qquad +12 = 3\cdot 4$

Hausübungen

2 b)



$$A = F(ABD) + 2 \cdot F(ADE)$$

$$F(ABD) = \frac{1}{2} a h_1$$

$$F(ADE) = \frac{1}{2} d h_2$$

Berechnung der beiden Höhen

$$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = d^2 \quad (1)$$

$$h_1^2 = d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\approx 1{,}618^2 a^2 - 0{,}25 a^2$$

$$\approx 2{,}3679\, a^2$$

$$h_1 \approx 1{,}5388\, a \quad (1)$$

$$h_2^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2 \quad (1)$$

$$h_2^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\approx a^2 - \frac{1}{4} \cdot 1{,}618^2 a^2$$

$$\approx 0{,}3455\, a^2$$

$$h_2 \approx 0{,}5878\, a \quad (1)$$

$$F(ABD) = \frac{1}{2} a \cdot h_1$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}5388\, a^2$$

$$\approx 0{,}7694\, a^2 \quad (1)$$

$$F(ADE) = \frac{1}{2} d\, h_2$$

$$\approx \frac{1}{2} \cdot 1{,}618 \cdot 0{,}5878\, a^2$$

$$\approx 0{,}4755\, a^2 \quad (1)$$

$$A = F(ABD) + 2 \cdot F(ADE)$$

$$\approx 0{,}7694\, a^2 + 2 \cdot 0{,}4755\, a^2 \approx 1{,}7204\, a^2 \quad (1)$$

(7)

a) $A = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\, a^2 \approx 1{,}7205\, a^2$ (1)

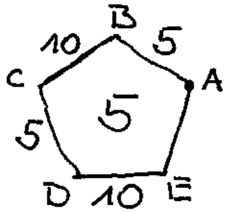
was sehr gut übereinstimmt

3. Winkel im 5-Eck : $\gamma_5 = 108°$

Winkel im 10-Eck : $\gamma_{10} = 180° \cdot \frac{8}{10} = 144°$

$2 \cdot \gamma_5 + \gamma_{10} = 216° + 144° = 360°$ (1)

Also kann man zwei 5-Ecke und ein 10-Eck um ein Punkt zusammenlegen (lokale Lösung)



Legt man an die Kante $\overline{AB}$ ein 5-Eck, so ergibt sich das weitere Anlegen zwangsläufig. An die Kante $\overline{EA}$ muss man bei Berücksichtigung der Ecke E ein 5-Eck anlegen.

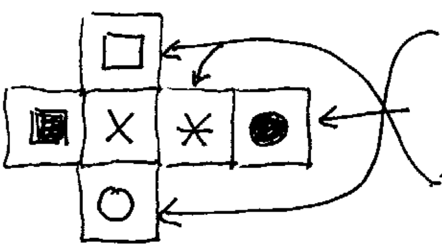
$\Rightarrow$ um A liegen 3 5-Ecke Widerspruch!

Also ist eine globale Lösung nicht möglich. (1)

5. Durch gedankliches „Aufklappen" der sichtbaren drei Flächen findet man:

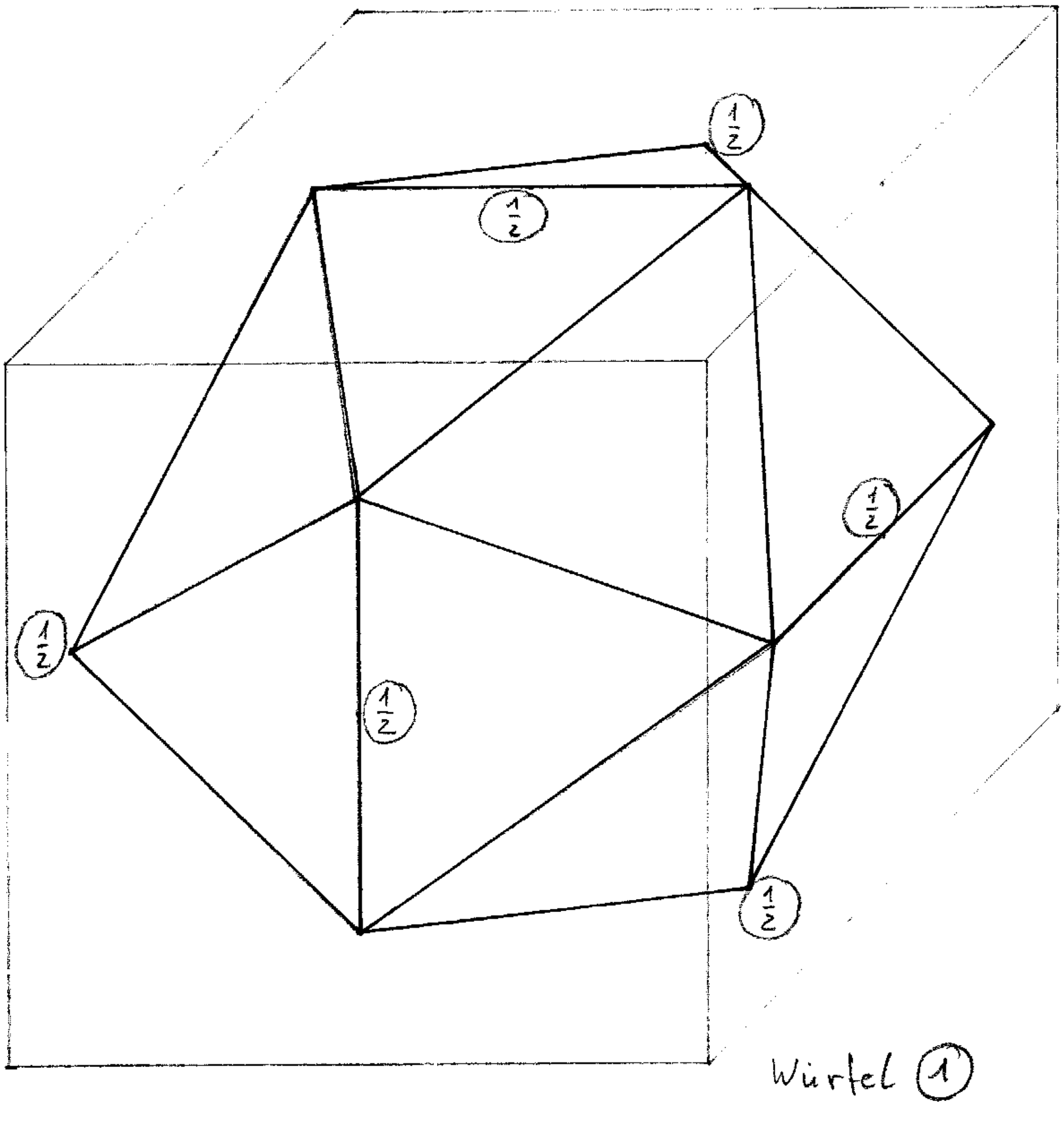
Zum Netz 1 gehören a) e) f) h) (1)

Also gehören zu Netz 2 b) c) d) g)



1. d) liefert ○
2. c) liefert ●
3. b) liefert □ und *
4. g) bestätigt □ und * (2)

4.



4

$5\,\text{cm} \cdot \varphi \approx 3{,}1\,\text{cm}$

A2	A3	A4	A5	Σ
8	2	4	3	17