Dr. Reimund Albers   Mathem. Denken u. Lehren   WiSe 11/12

5. Übung   Lösungen

1. a)

	Summe
1	1
1 1	2
1 2 1	4
1 3 3 1	8
1 4 6 4 1	16

Zählt man die Zahlen in einer Zeile zusammen, so erhält man eine Zweierpotenz.

b) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Also: In Zeile n ist die Summe gerade 2^n

c) Beweis durch vollständige Ind.

Ind. Anfang: $n=0$ $\binom{0}{0}=1=2^0$

$n=1$: $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2=2^1$ stimmt

Ind. Vorauss.: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Ind. Behaupt.: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}=2^{n+1}$

Beweis: $\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}$ Eine Zahl im Pasc. Δ

$=\sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]$ zerlegen in die Summe der beiden darüberstehenden

Summenzeichen verteilen

$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}$

Grenzen sinnvoll anpassen

$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

Indextransformation in der ersten Summe

$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

Induktionsvor. einsetzen

$=2^n+2^n$

$=2^{n+1}$ q.e.d.

eher grafisch

$$\binom{n}{0}\quad \binom{n}{1}\quad \cdots\quad \binom{n}{k-1}\quad \binom{n}{k}\quad \binom{n}{k+1}\quad \cdots\quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0}\quad \underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}}\quad \cdots\quad \underbrace{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}}\quad \underbrace{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}\quad \cdots\quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n+1}{0}\quad \binom{n+1}{1}\quad \cdots\quad \binom{n+1}{k}\quad \binom{n+1}{k+1}\quad \cdots\quad \binom{n+1}{n+1}$$

Bis auf die Randzahlen (=1) wird jede Zahl als Summe der beiden darüber stehenden Zahlen gebildet. Dabei wird jede Zahl der n-ten Zeile 2 Mal verwendet. Also ist die Summe der Zahlen in der n+1-ten Zeile das Doppelte der Summe der Zahlen in der n-ten Zeile. Ist die Summe in Zeile n 2^n (Indukt. vorauss.), so ist die Summe in Zeile n+1 $2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ (Induktionsbehauptung).

2. a) $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{4\cdot 5}{5!}+\dfrac{1}{5!}=\dfrac{21}{5!}$

b) $\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n(n+1)}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\dfrac{n^2+n-1}{(n+1)!}$

c) $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$ — in den Hauptnenner kommt jeweils die größere Fakultät

$=\dfrac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$ — Klammern im Zähler auflösen

$=\dfrac{n!\cdot k+n!+n!\cdot n-n!\cdot k}{(k+1)!(n-k)!}$

$=\dfrac{n!+n!\cdot n}{(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$

Hausübungen

3. $(8,1),\ (7,3),\ (6,5)$

a) $(9,1),\ (8,3),\ (7,5)$

$(10,1),\ (9,3),\ (8,5),\ (7,7)$

$(11,1),\ (10,3),\ (9,5),\ (8,7)$ 1

b) $(a, b) \quad (\overset{-1}{a-1},\ \underset{+2}{b+2})$ ein Schritt

$(a, b) \quad (\overset{-2}{a-2},\ \underset{+4}{b+4})$ zwei Schritte in einem

$(a, b) \quad (a-k,\ b+2k)$ k Schritte in einem

$(100, 1) \quad (70, 61)$ 30 Schritte

$(67, 67)$ 3 Schritte 2

c) Weitere Forschung

$(12,1) \ \ldots \ (9,7)$ 3 Schritte

$(13,1) \ \ldots \ (10,7)\ (9,9)$ 4 Schritte

Die Anzahl k der Schritte hängt mit $\frac{n}{3}$ zusammen.

<u>Ist $n-1$ durch 3 teilbar</u>, so macht man $\frac{n-1}{3}$ Schritte. Letztes Zahlenpaar ist dann

$$\left(n - \frac{n-1}{3},\ 1 + 2 \cdot \frac{n-1}{3}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{2n+1}{3},\ \frac{2n+1}{3}\right)}}$$

<u>Ist $n-2$ durch 3 teilbar</u>, so macht man $\frac{n-2}{3}$ Schritte. Letztes Zahlenpaar ist dann

$$\left(n - \frac{n-2}{3},\ 1 + 2 \cdot \frac{n-2}{3}\right) = \left(\frac{2n+2}{3},\ \frac{2n-1}{3}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{2n+2}{3},\ \frac{2n+2}{3} - 1\right)}}$$

Ist n durch 3 teilbar, so macht man $\frac{n-3}{3}$ Schritte. Letztes Zahlenpaar ist dann

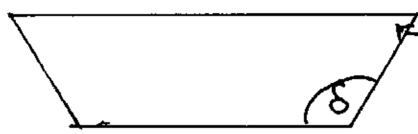
$$\left(n - \frac{n-3}{3},\ 1 + 2 \cdot \frac{n-3}{3}\right) = \left(2\frac{n}{3} + 1,\ 2\frac{n}{3} - 1\right)$$ 3

4. β ist der Mittelpunktswinkel, also $\beta = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ 0,5

δ ist der Innenwinkel, also $\delta = 180^\circ \cdot \frac{7}{9} = 140^\circ$ 0,5

Berechnung von α

Das Viereck AGHI ist ein Trapez mit $AG \parallel HI$



$180^\circ - \delta$ } Gilt allgemein in Trapezen

Also ist der Winkel $|\sphericalangle GAI| = 180^\circ - 140 = 40^\circ$

Dann ist $\alpha = 140^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ 1

Berechnung von γ

Das Sechseck ABCGHI: Die Summe der Innenwinkel ist $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Die Winkel bei H, I, A und B sind Innenwinkel des regelmäßigen 9-Ecks, also 140° groß. $720^\circ - 4 \cdot 140^\circ = 160^\circ$

Die restlichen 160° entfallen auf die beiden gleich großen Winkel bei C und G. Also ist $|\sphericalangle HGC| = 80^\circ$. Der Winkel $\sphericalangle HGA$ ist 40° groß (s.o.) Also bleibt $\gamma = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ 2

5. Parkett 4 8 8 : 4-Eck: 90° 8-Eck 135°

$90^\circ + 2 \cdot 135^\circ = 360^\circ$ stimmt 1

Parkett 3 12 12: 3-Eck: 60°

12-Eck: $\gamma = 180^\circ \cdot \frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{12}\,6} = 150^\circ$

$$\begin{array}{r} 60^\circ \\ +\,2 \cdot 150^\circ \\ \hline = 360^\circ \end{array}$$ stimmt 1

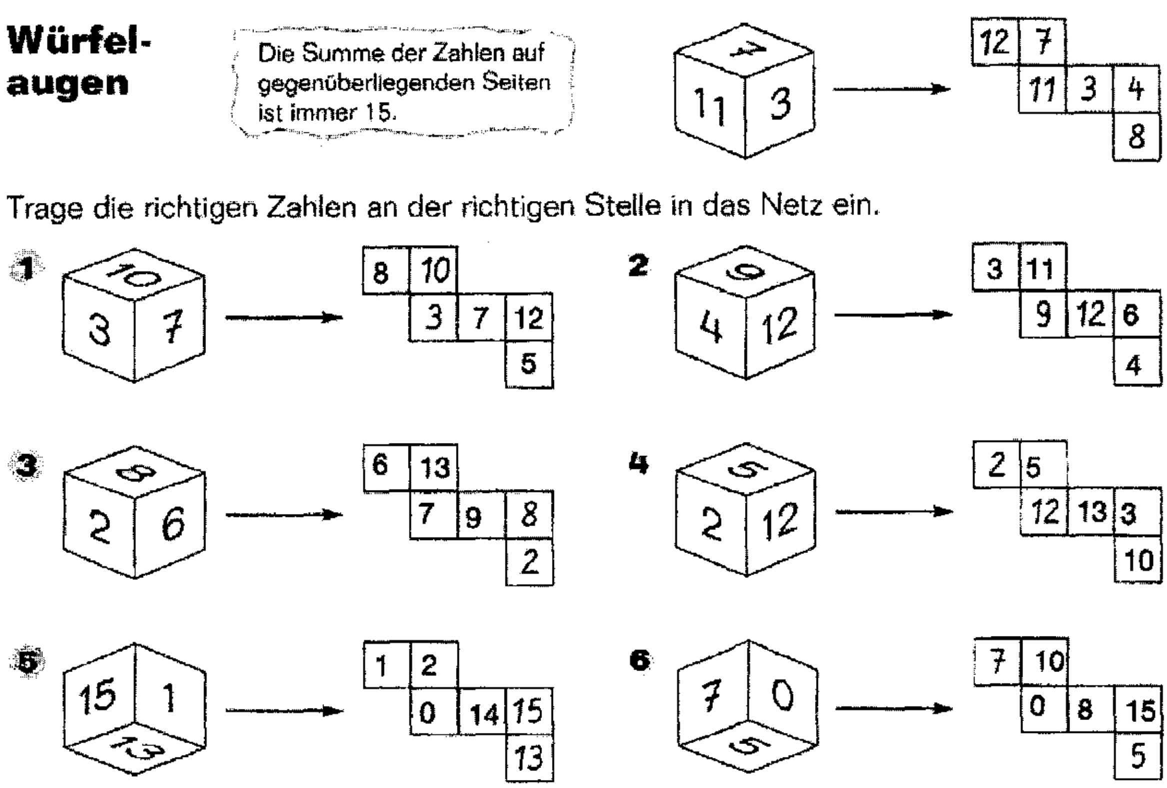
5b) i) Alle Möglichkeiten, dass 3 Vielecke passend in einer Ecke zusammenstoßen, sind: 3 7 42, 3 8 24, 3 9 18, 3 10 15, 3 12 12, 4 5 20, 4 6 12, 4 8 8, 5 5 10, 6 6 6

Quelle: Mathematische Basteleien, Homogene Parkettierungen

ii) Alle Möglichkeiten, dass 4 Vielecke passend in eine Ecke zusammenstoßen, sind: 3 3 4 12, 3 3 6 6, 3 4 4 6, 4 4 4 4

Quelle wie i)

6


Geometrie 34a

Würfelaugen

Die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten ist immer 15.

Trage die richtigen Zahlen an der richtigen Stelle in das Netz ein.

je 0,5

A3	A4	A5	A6	Σ
6	4	6	3	19