Dr. Reimund Albers   Mathem. Denken u. Lehren   WiSe 11/12

4. Übung Lösungen

1. a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\dots+(a_n+b_n)$

umordnen, erst a, dann b

$= a_1+a_2+a_3+\dots+a_n + b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1+ca_2+ca_3+\dots+ca_n$

ausklammern

$= c(a_1+a_2+a_3+\dots+a_n)$

$= c\sum_{k=1}^{n} a_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} b = \underbrace{b+b+b+\dots+b}_{n \text{ Summanden}}$

b ausklammern

$= b(1+1+1+\dots+1) = b\sum_{k=1}^{n} 1$

$= b\cdot n$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a+k)^2$ Binomische Formel

$= \sum_{k=1}^{n}(a^2+2ak+k^2)$

1a) Summe auf Summanden verteilen

$= \sum_{k=1}^{n} a^2 + \sum_{k=1}^{n} 2ak + \sum_{k=1}^{n} k^2$

1b) ausklammern

$= a^2\sum_{k=1}^{n} 1 + 2a\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2$

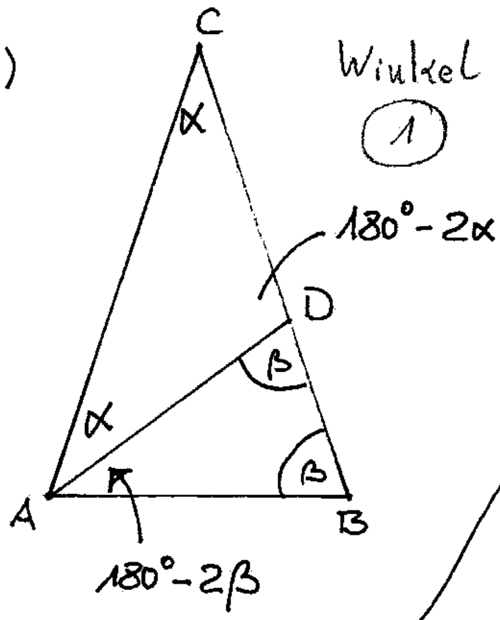
1c) und „Gauss"

$= a^2 n + 2a\,\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= an(a+n+1) + \sum_{k=1}^{n} k^2$

Hausübungen

3. a)



Winkel 1

Die beiden Winkel bei D ergänzen sich zu 180°:

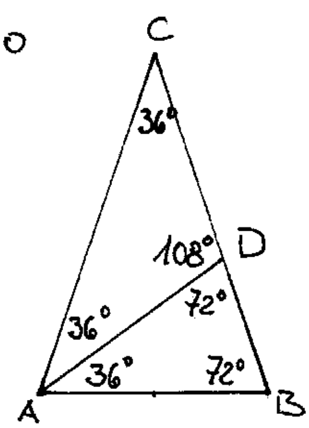
$$(180° - 2\alpha) + \beta = 180°$$
$$-2\alpha + \beta = 0$$
$$\beta = 2\alpha$$ 1

Da ΔABC gleichschenklig, gilt

$$\alpha + (180° - 2\beta) = \beta$$ 1
$$\alpha + 180° = 3\beta$$
$$\alpha + 180° = 6\alpha$$
$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$ 1

$$\beta = 2\alpha = 72°$$

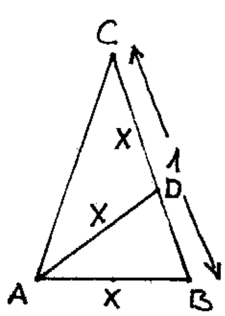
also



1

b) ΔABC und ΔABD. Bei beiden sind die beiden Winkel an der Basis 72°, in der Spitze 36°. Entsprechende Winkel sind gleich groß
=> beide Dreiecke sind ähnlich. 1

c)



In beiden Dreiecken:

$$\frac{\text{Basis}}{\text{Schenkel}} \Bigg| \quad \frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$ 2

sinnvolle geom. Lösung ist $x = \varphi$

4. a) b)

n	a_n	$\frac{a_n}{a_{n+1}}$
1	1	1,000000000
2	1	1,000000000
3	1	0,500000000
4	2	0,666666667
5	3	0,750000000
6	4	0,666666667
7	6	0,666666667
8	9	0,692307692
9	13	0,684210526
10	19	0,678571429
11	28	0,682926829
12	41	0,683333333
13	60	0,681818182
14	88	0,682170543
15	129	0,682539683
16	189	0,682310469
17	277	0,682266010
18	406	0,682352941
19	595	0,682339450
20	872	

2

Der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ scheint auf einen Grenzwert zu laufen, der bei ca. 0,682 liegt. 1

c)

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-2} \quad (1)$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{a_{k-2}}{a_k} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_k}{a_{k-2}}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} + \frac{a_{k-3}}{a_{k-2}}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\frac{a_k}{a_{k+1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}} + \frac{a_{k-3}}{a_{k-2}}} \quad (5)$$

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \quad (6)$$

$| : a_k$

Regel $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$ zwei Mal angew.

$a_k = a_{k-1} + a_{k-3}$

wieder $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

Brüche $\frac{\text{Folgenglied}}{\text{nächstes Folgeng.}}$ immer durch x ersetzt

je 0,5 3

d) $$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} + x}$$ ← Hauptnenner und Nenner nach oben

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{x}{1 + x^2} \quad | ~~\cdot~~ \cdot x(1+x^2)$$

$$1 + x^2 = x(1+x^2) + x^2 \quad | \text{ Klammer auflösen}$$

→

$1 + x^2 = x + x^3 + x^2$ | alles nach links

$-x^3 - x + 1 = 0$ | $\cdot (-1)$

$x^3 + x - 1 = 0$ (2)

e) Probe für $x = 0{,}68234$

$$\underline{x^3 \approx 0{,}31769}$$

$$x + x^3 \approx 1{,}00003$$

Also ist dann $x^3 + x - 1 \approx 0$ (1)

Folglich ist $x = 0{,}68234$ eine Näherungslösung.

5. a) Binomischer Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$ (1)

b) Ist $a^7 b^5$ gegeben, so ist im Binomischen Lehrsatz $k = 5$ und $n - k = 7$, also $n = 5+7 = 12$

Also ist der Koeffizient

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\ 7!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot 8}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 11 \cdot 72 = 792$$ (2)

Aufg 3: 8

Aufg 4: 9

Aufg 5: 3

20