1. a. nicht-oder:
Beeil dich nicht, oder du bekommst noch den Zug
(klingt ironisch)

Kontraposition

Wenn du den Zug nicht bekommen hast, dann hast du dich auch nicht beeilt.

Verneinung
Du hast dich beeilt und (trotzdem) den Zug nicht bekommen.

b. nicht-oder
n ist nicht durch 6 teilbar oder n ist gerade
(extrem verwirrend)

Kontraposition
Wenn n nicht ~~da~~ gerade ist, dann ist es (auch) nicht durch 6 teilbar.
(klarer Fall von „ist notwendig")

Verneinung
n ist durch 6 teilbar und ungerade

c. nicht-oder

Sie sind nicht über 25 <u>oder</u> Sie haben keinen gültigen Führerschein oder Sie können das Auto mieten. (so etwas sagt keiner)

Kontraposition

Wenn Sie das Auto nicht mieten können, dann sind Sie nicht über 25 <u>oder</u> haben keinen gültigen Führerschein.

Verneinung

Sie sind über 25 und haben einen gültigen Führerschein und können (doch) nicht dieses Auto mieten.

2. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ die Menge aller pos. und neg. Brüche bzw. aller Zahlen, die sich als Brüche schreiben lassen, z.B. $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ $\quad 4 = \frac{8}{2}$ $\quad 0,57 = \frac{57}{100}$

$\mathbb{R}$ die Menge aller (schulischen) Zahlen, also neben den Brüchen auch z.B. $\sqrt{5}$, π, $0,1010010001\dots$

3. a) $n!\,(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n \cdot (n+1) = (n+1)!$

b) $\frac{n!}{n(n-1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)\cancel{(n-1)}\cancel{n}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}} = (n-2)!$

c) $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2)$

$n + 2! = n + 2$ im Allgem. <u>viel</u> kleiner als

d) $(n+2)!$ ~~s.o.~~ $n! + 2!$ im Allgem. kleiner als

$= n! \cdot (n+1)(n+2)$

e. Beispiel: $n = 4$ Dann ist $(2n)! = (2 \cdot 4)! = 8!$

$= 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

Aber $2! \cdot n! = 2 \cdot 4!$

also ist das viel kleiner als das

f. $$\binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)}{(k+1)}$$

$$= \frac{n!\,\cancel{(n-k)}}{k!\,(k+1) \cdot (n-k-1)!\,\cancel{(n-k)}}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} = \binom{n}{k+1}$$

Hausübungen

4. gegeben 2 5 7 12 19 31

gegeben	2	5	7	12	19	31	
a) erste Zahl ±1:	3	5	8	13	21	34	+3
	1	5	6	11	17	28	−3

Die 1. Zahl wirkt sich um das 3-fache bei der 6. Zahl aus. 1

b)	2	5	7	12	19	31	
zweite Zahl ±1:	2	6	8	14	22	36	+5
	2	4	6	10	16	26	−5

1

c) gegeben	5	17	22	39	61	100	
+5	10	17	27	44	71	115	+15

Erhöht man die erste Zahl um 5, so wächst die 6. Zahl um $5 \cdot 3 = 15$ (siehe a))

10 14 24 38 62 100

Verringert man dann die zweite Zahl um 3, so verringert man das Endergebnis um $3 \cdot 5 = 15$. Damit gleichen sich beide Veränderungen, +5 bei der 1. Zahl, −3 bei der 2. Zahl, bei der 6. Zahl gerade aus. 2

d) Mit der in c) beschriebenen, systematischen Veränderung kann man alle Startzahlpaare ermitteln, die natürliche Zahlen sind.

→

4d Fortsetzung

5	17	22	39	61	100
10	14	24	38	62	100
15	11	26	37	63	100
20	8	28	36	64	100
25	5	30	35	65	100
30	2	32	34	66	100

Lässt man die Null noch zu, gibt es noch die Zahlenkette

0 20 20 40 60 100

2

e) Setzt man die Idee der gemeinsamen Veränderung von 1. und 2. Zahl allgemeiner fort, so kommt man auf

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Zahl} & 5 + k\cdot 5 \\ \text{2. Zahl} & 17 - k\cdot 3 \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel: $k = -3 \Rightarrow$ 1. Zahl: -10, 2. Zahl: 26

Also $-10 \quad 26 \quad 16 \quad 42 \quad 58 \quad 100$

allgemeine Rechnung: Für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$5 + k\cdot 5,\ 17 - k\cdot 3,\ 22 + k\cdot 2,\ 39 - k,\ 61 + k,\ 100$

2

f) Lässt man in e) für k auch rationale Zahlen zu, trifft die Zahlenkette weiterhin 100.

z.B. $k = 0{,}3$

6,5; 16,1; 22,6; 38,7; 61,3; 100

z.B. $k = -\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, 21, $39\frac{1}{2}$, $60\frac{1}{2}$, 100

2

5

5. a)

$$\begin{array}{ccc} & 28 & \boxed{8} \\ \boxed{84} & 36 & 9 \\ & 120 & \boxed{45} \end{array}$$

$\bigcirc\ 28 \cdot 9 \cdot 120 = 30240$

$\square\ 8 \cdot 84 \cdot 45 = 30240$

1

b) 1. Version

$$\begin{array}{ccccc} & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \\ \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

1,5

2. Version

$$\begin{array}{ccccc} & \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} & \\ \binom{n+1}{k} & & \binom{n+1}{k+1} & & \binom{n+1}{k+2} \\ & \binom{n+2}{k+1} & & \binom{n+2}{k+2} & \end{array}$$

1,5

c) Gerechnet wird in der 1. Version

1. Dreierprodukt

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

geordnet:

$$= \frac{(n-1)!\; n!\; (n+1)!}{(k-1)!\; k!\; (k+1)!\; (n-k-1)!\,(n-k)!\; (n-k+1)!}$$

2

2. Dreierprodukt

$$\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n-1)!}{k!\;(n-k-1)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!\;(n-k)!}$$

geordnet:

$$= \frac{(n-1)!\; n!\; (n+1)!}{(k-1)!\; k!\; (k+1)!\; (n-k-1)!\,(n-k)!\; (n-k+1)!}$$

2

Beide geordneten Bruchterme sind gleich, also auch die zugehörigen Ausgangsterme. 1

Aufg: 4 : 10

Aufg. 5: $\underline{9}$

19