Dr. Reimund Albers Mathem. Denken u. Lehren 1 WiSe 11/12

Übung 2 Lösungsskizzen

1.

A	B	C	A oder (B und C)		(A oder B) und (A oder C)		
w	w	w	**w**	w	w	**w**	w
w	w	f	**w**	f	w	**w**	w
w	f	w	**w**	f	w	**w**	w
w	f	f	**w**	f	w	**w**	w
f	w	w	**w**	w	w	**w**	w
f	w	f	**f**	f	w	**f**	f
f	f	w	**f**	f	f	**f**	w
f	f	f	**f**	f	f	**f**	f
1.	2.	3.	**5.**	4.	6.	**8.**	7.

Reihenfolge des Ausfüllens

Die Ergebnisspalten sind für den linken Term die 5. Spalte, für den rechten Term die 8. Beide haben in jeder Zeile den gleichen Wahrheitswert. Also sind beide logischen Terme äquivalent.

2. a) $n = 4$

$F_5^2 = 4 F_4 \cdot F_3 + F_2^2$ ist zu zeigen

$F_5^2 = 5^2 = 25$ stimmt

$4 F_4 \cdot F_3 + F_2^2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1^2 = 24 + 1 = 25$

$n = 10$

Zu zeigen ist jetzt: $F_{11}^2 = 4 \cdot F_{10} \cdot F_9 + F_8^2$

linke Seite: $F_{11}^2 = 89^2 = 7921$

rechte Seite: $4 \cdot F_{10} \cdot F_9 + F_8^2 = 4 \cdot 55 \cdot 34 + 21^2 = 7480 + 441$

$= 7921$ stimmt!

2b) F_{n+1}^2 — Definition Fibonacci-Zahlen

$= (F_n + F_{n-1})^2$ — Klammern auflösen

$= F_n^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2$ — Def. Fibonacci

$= (F_{n-1} + F_{n-2})^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2$ — Klammern

$= F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2 + 2F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2$ — zusammenf., umordnen

$= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n-2} + 2F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$

$= 2F_{n-1}\underbrace{(F_{n-1} + F_{n-2})} + 2F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$

$= 2F_{n-1}F_n + 2F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$ — zusammenfassen

$= 4F_nF_{n-1} + F_{n-2}^2$

HAUSÜBUNGEN

a. Generation

0

1

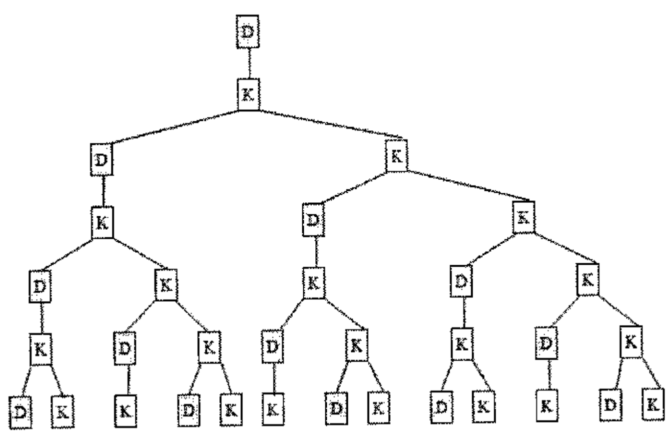
2

3

4

5

6



2

b. In der 6. Generation hat die Drohne 8 Königinnen und 5 Drohnen als Vorfahren

$8 = F_6 \quad 5 = F_5$ 1

Die Anzahl von Königinnen und Drohnen ist immer eine Fibonacci-Zahl

Generation n: F_n Königinnen und F_{n-1} Drohnen 1

c. Laut b hat man dann in der 20. Generation

$F_{20} = 6765$ Königinnen und

$F_{19} = 4181$ Drohnen als Vorfahren der Drohne

1

d. In der n. Generation gilt

F_n Königinnen und F_{n-1} Drohnen ergibt zusammen $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ Vorfahren.

Dann sind alle Vorfahren bis zur 20. Generation

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{1. Gener.}}}{F_2} + F_3 + F_4 + \ldots + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{20. Gener.}}}{F_{21}}$$

$$= F_1 + F_2 + \ldots + F_{21} - 1$$

Ausgleich

$$= F_{23} - 1 - 1$$

Formel Vorlesung

$$= 28657 - 2 = 28655$$

3

Nummer n	Fibonacci-Zahl Fn
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765
21	10946
22	17711
23	28657
24	46368
25	75025
26	121393
27	196418
28	317811
29	514229
30	832040
31	1346269
32	2178309
33	3524578
34	5702887
35	9227465
36	14930352
37	24157817
38	39088169
39	63245986
40	102334155

4. a) $n = 1$: $F_1^2 = 1$ $\quad F_1 \cdot F_2 = 1$ ✓

$n = 2$: $F_1^2 + F_2^2 = 2$ $\quad F_2 \cdot F_3 = 2$ ✓

$n = 3$: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 6$ $\quad F_3 \cdot F_4 = 6$ ✓

$n = 4$: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 15$ $\quad F_4 \cdot F_5 = 15$ ✓

$n = 5$: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 40$ $\quad F_5 \cdot F_6 = 40$ ✓

$n = 6$: $F_1^2 + \ldots + F_5^2 + F_6^2 = 104$ $\quad F_6 \cdot F_7 = 8 \cdot 13 = 104$ ✓

2

4

b) Um die Summe für $n = 6$ auszurechnen, muss man zur Summe für $n=5$ nur noch den 6. Summanden dazuzählen, also $+ F_6^2$.

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2}_{= 40} + \underbrace{F_6^2}_{8^2}$$

Das Ergebnis kennt man schon aus der vorhergehenden Rechnung

$$40 \qquad + 8^2 \qquad = 104$$

der 6. Summand

2

c) $F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1})$

$= F_{n+1} \cdot F_{n+2}$

Was zu zeigen war.

1

A3: $2+2+1+3 = 8$

A4: $2+2+1 \quad = \underline{5}$

13

Fibonacci-Zahlen!