

12. Übung

Verknüpfung von Kongruenzabbildungen

Präsenzübungen (für Mi 4.7.)

1. Berechnen Sie für die Abbildung F mit der Gleichung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ die

Abbildungsgleichung zur inversen Abbildung F^{-1} .

Anleitung:

- a. Bilden Sie zwei Punkte A, B mit F ab auf ihre Bildpunkte A', B' . Die Gleichung zur inversen Abbildung F^{-1} lautet zunächst unbestimmt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{x}' . \text{ Setzen Sie nun Bildpunkt und Ursprung (umgekehrt) ein und}$$

bestimmen Sie daraus die vier Komponenten der Matrix der Umkehrabbildung.

- b. Zur inversen Abbildung gehört die inverse Matrix. Diese ist dadurch

$$\text{charakterisiert, dass gilt: } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In Worten: Matrix mal inverser Matrix ist die Einheitsmatrix.

Rechnen Sie links das Matrixprodukt aus und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem, das in zwei 2x2-Systeme zerfällt.

2. Zeigen Sie durch Matrizenmultiplikation, dass zur Drehung um O mit dem Winkel α die Drehung um den Winkel $-\alpha$ die inverse Abbildung ist.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 6.7.)

3. Gegeben sind die drei Spiegelungen

S_1 : Spiegelung an der x_1 -Achse

S_2 : Spiegelung an der Geraden durch O , die mit der x_1 -Achse einen Winkel von 45° einschließt

S_3 : Die Spiegelung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Überlegen Sie, welche Teilaufgaben wechselseitige Kontrollen der Ergebnisse zulassen und vermerken Sie das ausdrücklich schriftlich. Sie sollen die Vernetzung der Teilaufgaben **selbst** erkennen.

- a. Stellen Sie für die drei Spiegelungen die drei Abbildungsgleichungen auf.

Die drei Abbildungen werden verkettet in der Reihenfolge: erst S_1 , dann S_2 , dann S_3 .

- Berechnen Sie für $P(5;3)$ schrittweise die Bildpunkte $P'=S_1(P)$, $P''=S_2(P')$, $P'''=S_3(P'')$.
- Bestimmen Sie für die Spiegelung S_3 den Winkel, den die Spiegelungsachse mit der x_1 -Achse einschließt.
- Zeichnen Sie die drei Spiegelachsen und den Punkt P in ein Achsenkreuz. Konstruieren Sie mit dem Geodreieck schrittweise die Bildpunkte.
- Konstruieren Sie die Achse a der Spiegelung S_4 , die P unmittelbar auf P''' abbildet.
- Begründen Sie, warum die Achse a durch den Ursprung O gehen muss.
- Berechnen Sie durch Matrixmultiplikation die Matrix zur Verknüpfung $S_3 \circ S_2 \circ S_1$. Berechnen Sie aus dem Ergebnis den Winkel, den die Spiegelachse mit der x_1 -Achse einschließt.

4. Eine Konzentrationsübung

Gegeben sind die (allgemeinen) Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ und

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie zur Überprüfung des Assoziativgesetzes einmal $(A \cdot B) \cdot C$ und dann $A \cdot (B \cdot C)$. Halten Sie Ausschau nach mathematischer Schönheit und Harmonie¹.

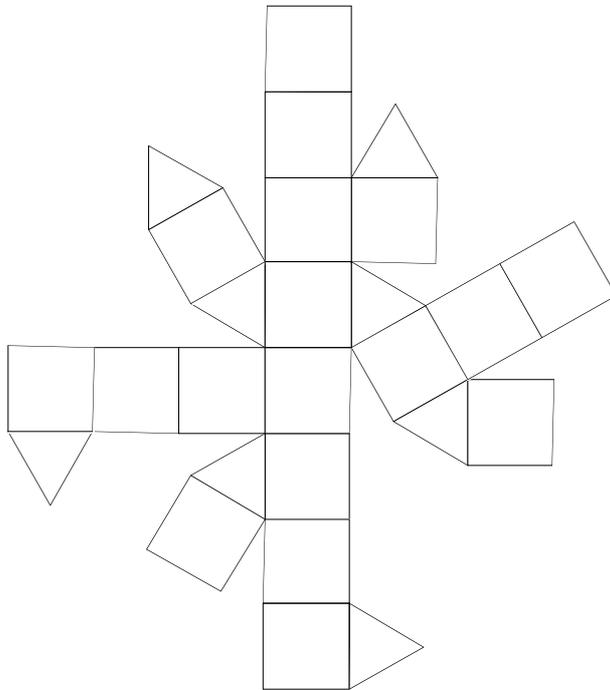
5. Gegeben ist die Matrix $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ einer Spiegelung und der Vektor $\begin{pmatrix} d \cdot \cos \alpha \\ d \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$ einer Verschiebung.

- Begründen Sie durch eine Skizze, dass der Vektor parallel zur Spiegelachse der Spiegelung verläuft.
- Schreiben Sie die Abbildungsgleichung auf zur Verschiebung T mit dem gegebenen Vektor und die Abbildungsgleichung zur Spiegelung S mit der gegebenen Matrix.
- Berechnen Sie die Abbildungsgleichungen zu den beiden Verknüpfungen $S \circ T$ und $T \circ S$. Was ist bemerkenswert?

¹ „In der Mathematik liegen Wahrheit und Schönheit dicht beieinander. Wenn die Formeln schön werden, weiß ich, dass ich auf dem richtigen Weg bin.“ Ein Mathematiker in dem Film „Enigma“.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren



Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat dieser Körper (dessen Netz man sieht)? Erläutern Sie Ihre Zählweise.