11. Übung
Kongruenzabbildungen im Koordinatensystem

Präsenzübungen (für Mi 27.6.)

1. Bilden Sie für die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ das Produkt A·B und B·A.

2. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von zwei Drehungen um den Winkel α bzw. β eine Drehung um den Winkel $\alpha+\beta$.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 29.6.)

3. Gegeben ist die Abbildungsgleichung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
   a. Begründen Sie , dass die Abbildungsmatrix zu einer Drehung gehört und dass die gesamte Abbildung eine Drehung sein muss (*Hinweis: Zweispiegelungssatz, Reduktionssatz*).
   b. Berechnen Sie zum Dreieck OAB mit O(0;0) , A(5;0) und B(0;3) die Bildeckpunkte O', A' und B'. Zeichnen Sie Ur- und Bildpunkte in ein Koordinatensystem (1 Einheit 1 cm). Ermitteln Sie aus der Zeichnung das Drehzentrum.
   c. Das Drehzentrum Z ist der (einzige) Fixpunkt einer Drehung. Also erfüllt der Punkt/Ortsvektor die Gleichung $\vec{z} = A\vec{z} + \vec{d}$. Berechnen Sie mit diesem Ansatz für die oben gegebene, konkrete Abbildung das Drehzentrum. Vergleichen Sie mit Ihrer zeichnerischen Lösung.

4. Schreiben Sie die Abbildungsmatrix für die Drehung um 90° auf.
   a. Der Punkt A(3;1) liegt auf der Geraden $x_2 = \frac{1}{3}x_1$ (Ihnen ist wahrscheinlich die Form $y = \frac{1}{3}x$ geläufiger, aber wir hatten ja den Achsen des Koordinatensystems neue Namen gegeben) also der Ursprungsgeraden mit der Steigung $\frac{1}{3}$. Bilden Sie den Punkt A mit der Drehung um 90° ab auf den Punkt A' und bestimmen Sie so die Bildgerade, insbesondere deren Steigung.
   b. Verfahren Sie ebenso mit dem Punkt B(4;5) und der Geraden $x_2 = \frac{5}{4}x_1$. (Haben Sie bereits aus den beiden Beispielen eine Vermutung, wie zu einer Geraden die Steigung einer dazu senkrechten Geraden lautet?)

c. Bilden Sie allgemein den Punkt P(p_1;p_2) mit der Drehung um 90° ab auf den Punkt P'. Bestimmen Sie die Geradengleichung zur Geraden OP und OP' und lösen Sie so das Problem, zu einer Geraden die Steigung einer dazu senkrechten Geraden zu bestimmen.

5.

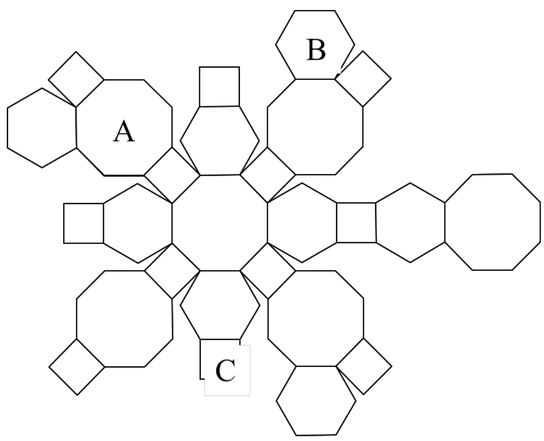
a. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $x_2 = \frac{1}{3}x_1$. Wählen Sie auf den Koordinatenachsen 10 Kästchen = 5 cm für eine Einheit. Spiegeln Sie die Basisvektoren an der Geraden g und stellen Sie so die Gleichung für die Spiegelung an g auf.
(*Beachten Sie die Erkenntnisse über senkrechte Richtungen aus Aufgabe 4*)

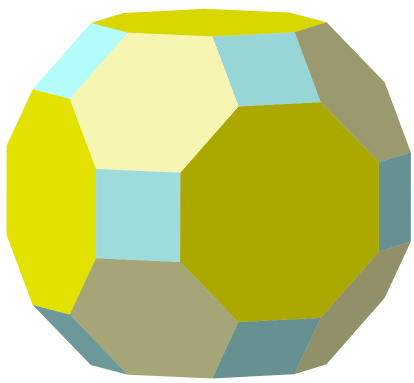
b. Verfahren Sie analog mit der Geraden h: $x_2 = 3x_1$ und bestimmen Sie die Abbildungsgleichung für die Spiegelung an h.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

5. Die beiden nachfolgenden Abbildungen zeigen das Netz eines Körpers und den Körper selbst.





Bestimmen Sie die Flächen, die den markierten Flächen gegenüber liegen.