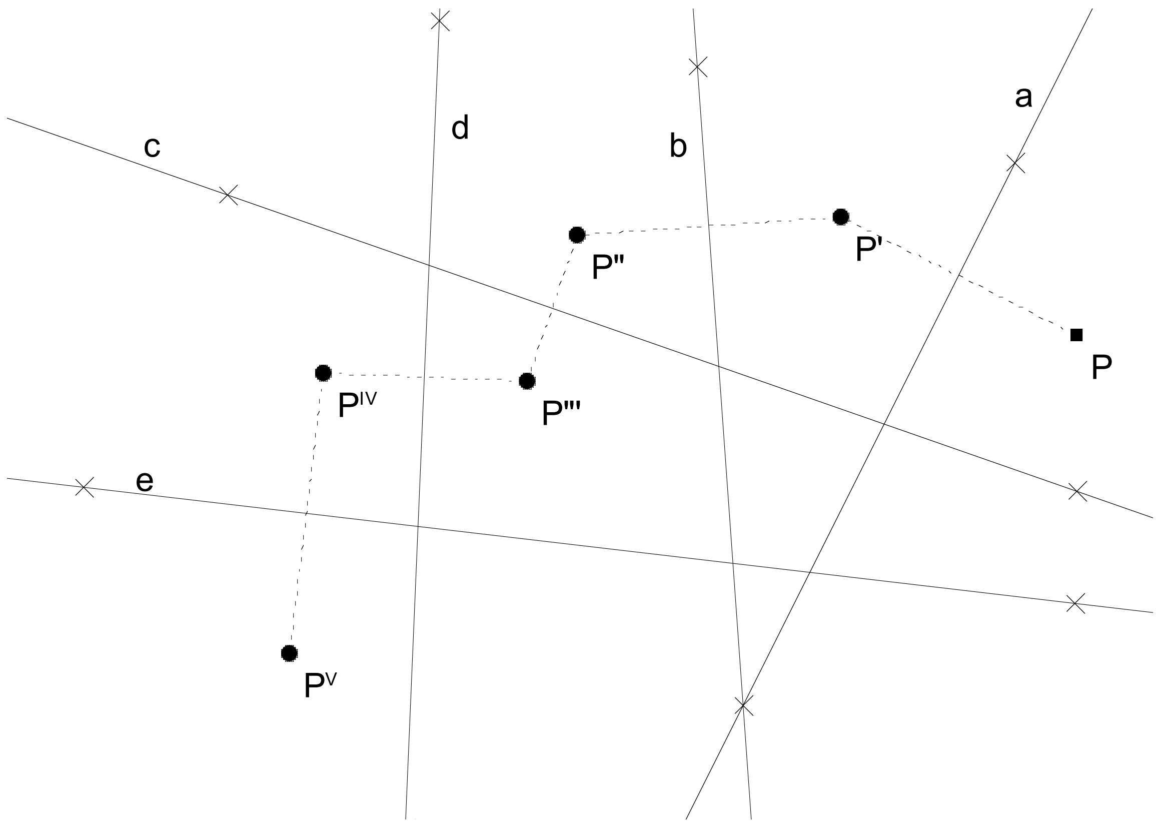
9. Übung
Verknüpfung von Spiegelungen

Präsenzübungen (für Mi 13.6.)

1. Analysieren Sie, was die VerfasserIn wohl mit dem jeweiligen Satz aussagen wollte. Verbessern Sie sie.
   (Alles Originalzitate von Studentinnen aus Klausuren)
   a. „Spiegelungen sind orthogonal zur Spiegelachse“
   b. „Bei einer Geradenspiegelung werden Geraden wieder auf Geraden abgebildet, die längentreu sind.“
   c. „Die Spiegelung ist eine Kongruenzabbildung auf sich (in der Ebene).“
   d. Die Spiegelachse bildet den Punkt A ab auf den Bildpunkt A’
   e. Die Punkte und Bildpunkte liegen senkrecht auf der Achse.

2.



Die Abbildung zeigt 5 Geraden a, b, c, d und e und die Spiegelung eines Punktes P an diesen in dieser Reihenfolge. Also $(S_e \circ S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a)(P) = P^{\mathrm{V}}$.
Vereinfachen Sie diese Verknüpfung von 5 Geradenspiegelungen zu einer Verknüpfung von 3 Geradenspiegelungen. Machen Sie anschließend die Probe mit

dem Punkt P.
Lösen Sie anschließend die Aufgabe auf eine andere Weise und machen Sie wieder die Probe für P.
Warum darf man nicht die beiden Geraden a und c als Paar „verdrehen“?

Hausübungen (Abgabe: Fr, 15.6.)

3. Wir betrachten wieder einmal die Verknüpfung von Decktransformationen zu regulären Vielecken. Um Muster und Regelmäßigkeiten besser aufdecken zu können, nehmen wir nicht das Quadrat, sondern das regelmäßige Sechseck.
   a. Füllen Sie die Verknüpfungstabelle aus.
   b. Malen Sie alle Felder mit einer Farbe an, in denen D_{120} steht, ebenso mit einer anderen Farbe alle Felder mit S_{30}.
   c. Erläutern und begründen Sie die Strukturen, die man durch die farbigen Bänder erkennen kann.
   (*Hinweis: Zwei- und Dreispiegelungssatz*
   Wenn Sie Aufgabenteil c. vorziehen, können Sie die Tabelle in a. leichter ausfüllen.)

4. Gegeben ist ein Kreis und auf diesem vier verschiedene Punkte A, B, C und D. Diese bilden ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, das einen Umkreis hat.
   a. Beweisen Sie, dass in einem Sehnenviereck die Summe der Größe von gegenüberliegenden Winkeln 180° ist.

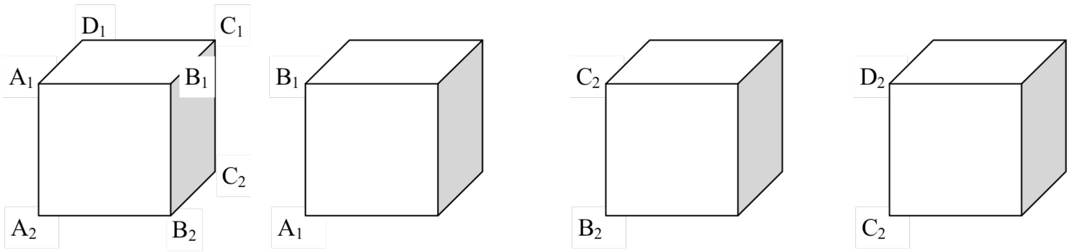
   Seien a die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$, b die Mittelsenkrechte zu $\overline{BC}$, c die Mittelsenkrechte zu $\overline{CD}$ und d die Mittelsenkrechte von $\overline{DA}$. Betrachten Sie die Verknüpfung der vier Spiegelungen $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$.
   b. Welche beiden Punkte sind offensichtlich Fixpunkte der Abbildung $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$?
   c. Begründen Sie, dass die Abbildung $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$ die Identität sein muss.
   (*Die Identität hatten wir bei den Quadrattransformationen und hier auf dem Übungsblatt bei den Sechsecktransformationen mit D_0 bezeichnet. Die übliche Bezeichnung ist id. Es ist die Abbildung, die jeden Punkt der Ebene auf sich selbst abbildet.*)

5.
   a. Setzen Sie in die Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ ein: $\beta = 90°-\alpha$. Welche andere Formel erhalten Sie?
   b. Entwickeln Sie eine Formel für $\sin 3\alpha$, in der nur $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ vorkommen. Rechnen Sie Ihr Ergebnis nach für $\alpha = 30°$.
   c. Für $0° \le \alpha < 90°$ gilt $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$ Leiten Sie diese Formel her. Warum ist sie für $\alpha = 90°$ nicht definiert?
   d. Das Additionstheorem für den Tangens lautet $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$. Leiten Sie diese Formel her.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

6. Verdrehter Würfel. Beschriften Sie die übrigen Ecken.



Extraaufgabe

Beweisen Sie: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an einer Seite des Dreiecks, so liegt das Spiegelbild auf dem Umkreis des Dreiecks.