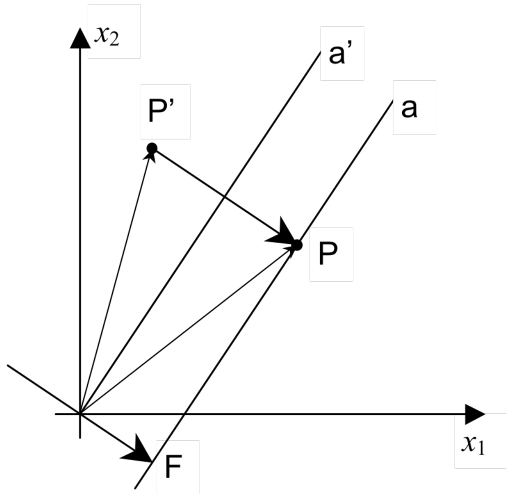
Diese Abbildungsgleichung lautet: $\vec{x}\,''' = \vec{x}\,'' + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$.

Setzt man für eine Verknüpfung der drei Abbildungen die drei Abbildungsgleichungen ineinander ein, so erhält man:

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\left[\vec{x} + \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\vec{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\vec{d}}$$

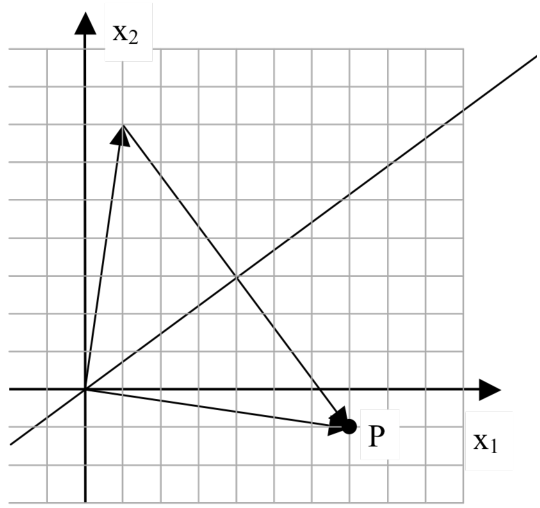
Man erhält also eine Spiegelung an der zu a parallelen Geraden a', die durch den Ursprung verläuft, mit einer anschließenden Verschiebung. Dabei verläuft der Verschiebungsvektor $\vec{d}$ von P', dem an a' gespiegelten Punkt P, zum Punkt P. Das ist aber auch das Doppelte des Vektors von O zum Fußpunkt F des Lotes von O auf die Gerade a, also $\overrightarrow{P'P} = 2\overrightarrow{OF}$. Insbesondere diese Interpretation lässt sich günstig in beide Richtungen einsetzen:



- Man kennt den Winkel α der Spiegelungsachse mit der x_1-Achse und den Fußpunkt F des Lotes von O auf die Spiegelungsachse. Dann lautet die Abbildungsgleichung:
  $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\vec{x} + 2\cdot\overrightarrow{OF}$
- Kennt man umgekehrt die Abbildungsgleichung und ist der Verschiebungsvektor $\vec{d}$ senkrecht zur Spiegelungsachse, so kann man mit inversen Winkelfunktionen aus der Matrix den Winkel α bestimmen und $\frac{1}{2}\vec{d}$ bestimmt dann den Fußpunkt des Lotes, also einen Punkt, durch den die Spiegelungsachse verläuft.

Beispiel:

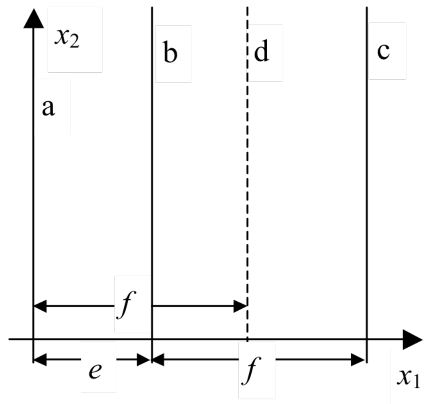
Gegeben ist die Spiegelung mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & -0{,}28 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(7;-1), durch den die Spiegelungsachse laufen soll. Dann ist der mit der Spiegelungsmatrix multiplizierte Vektor $\begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & -0{,}28 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Also ist der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ und die Abbildungsgleichung lautet $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & -0{,}28 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$. Ein zu $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ senkrechter Vektor ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, folglich hat die



Spiegelachse die Steigung $\frac{3}{4}$.

b) Die drei Spiegelachsen verlaufen zueinander parallel

Eine günstige Wahl des Achsenkreuzes ist, dass die x_2-Achse entlang der ersten Spiegelachse a liegt. Dann verläuft die x_1-Achse senkrecht zur ersten Spiegelungsachse a, zur zweiten Spiegelachse b und zur dritten Spiegelungsachse c. Es seien e der Abstand von a zu b und f der Abstand von b zu c.
Da mit diesen Festlegungen die Fußpunkte der Lote der nicht durch den Ursprung verlaufenden Spiegelungsachsen b und c bekannt sind, kann man die Abbildungsgleichungen für die Spiegelungen aufstellen.



$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}\,' + \begin{pmatrix} 2e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}\,'' + \begin{pmatrix} 2(e+f) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Verkettung der drei Abbildungen liefert

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2e \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2(e+f) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die Gleichung aus und fasst zusammen, so ergibt sich.

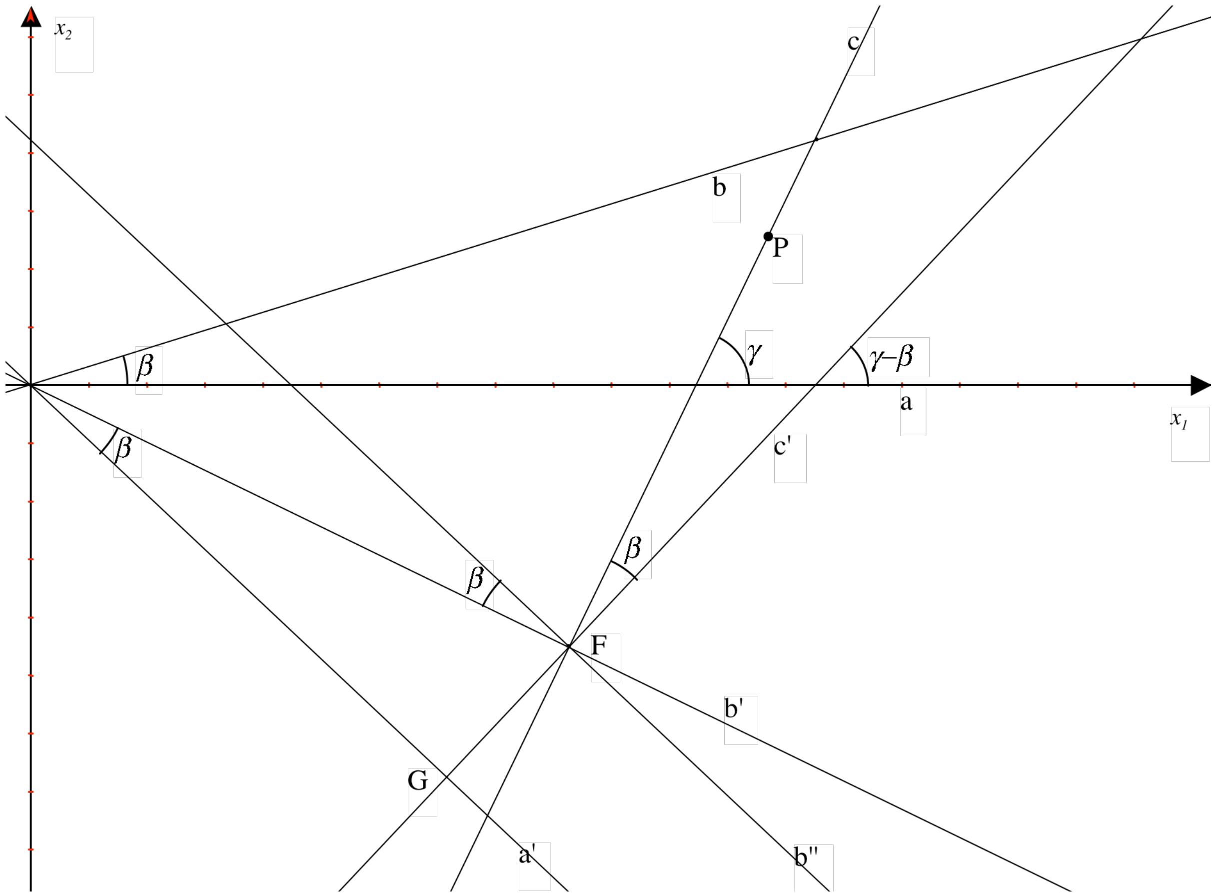
$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Spiegelungsachse für diese Ergebnismatrix weiterhin parallel zur x_2-Achse verläuft, ist der Vektor $\begin{pmatrix} 2f \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht zu dieser. Daher ist die letzte Abbildungsgleichung diejenige, die zu einer Spiegelung an der Achse d gehört. d verläuft parallel zu a, b und c und hat zur x_2-Achse einen Abstand von f.

Die Spiegelung an drei Geraden a, b und c, die zueinander parallel sind und voneinander die Abstände $e = d(a,b)$ bzw. $f = d(b,c)$ haben, lassen sich zu einer Geradenspiegelung an einer Geraden d zusammenfassen. Dabei ist der Abstand von d zur Geraden a gleich f.

c) Die drei Spiegelachsen liegen in allgemeiner Lage

Eine günstige Wahl des Achsenkreuzes ist, die x_1-Achse auf die erste Spiegelungsachse a zu legen und den Ursprung in den Schnittpunkt von a und b. Dann verläuft b durch den Ursprung, der Winkel zur x_1-Achse sei β. Die Gerade c sei durch einen Punkt $P(p_1;p_2)$ und den Winkel γ zur x_1-Achse festgelegt.



Dann sind die Abbildungsgleichungen:

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \vec{x}\,'' + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Die Verkettung der drei Abbildungen liefert

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der drei Matrizen ergibt:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

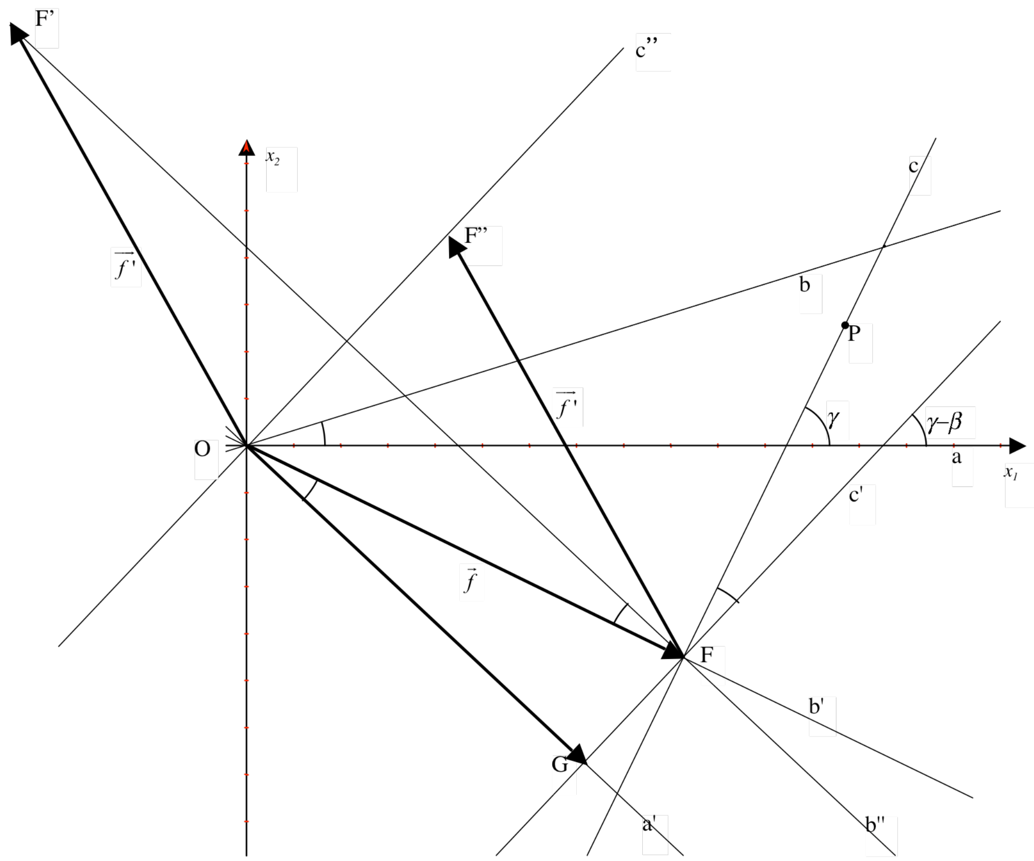
$$= \begin{pmatrix} \cos 2\gamma \cos 2\beta + \sin 2\gamma \sin 2\beta & -\cos 2\gamma \sin 2\beta + \sin 2\gamma \cos 2\beta \\ \sin 2\gamma \cos 2\beta - \cos 2\gamma \sin 2\beta & -\sin 2\gamma \sin 2\beta - \cos 2\gamma \cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\gamma - \beta) & \sin 2(\gamma - \beta) \\ \sin 2(\gamma - \beta) & -\cos 2(\gamma - \beta) \end{pmatrix}$$

Die Ergebnismatrix gehört zu einer Achsenspiegelung, deren Spiegelungsachse mit der x_1-Achse einen Winkel von $\gamma - \beta$ einschließt.

Der Verschiebungsvektor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ist der doppelte Vektor von O zum Fußpunkt des Lotes auf die Gerade c. In der obigen Abbildung ist das der Punkt F. Nennt man $\overrightarrow{OF} = \vec{f}$ so ist die Abbildungsgleichung der Verknüpfung der drei Spiegelungen

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} \cos 2(\gamma-\beta) & \sin 2(\gamma-\beta) \\ \sin 2(\gamma-\beta) & -\cos 2(\gamma-\beta) \end{pmatrix} \vec{x} + 2\vec{f}$$

Geometrische Interpretation



Zur Spiegelung an c', der Geraden, die mit der x_1-Achse einen Winkel von $\gamma - \beta$ einschließt, gehört der Lotfußpunkt G. Man bestimmt den Vektor $\overrightarrow{OG}$ durch

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\left[\vec{f} - \begin{pmatrix} \cos 2(\gamma-\beta) & \sin 2(\gamma-\beta) \\ \sin 2(\gamma-\beta) & -\cos 2(\gamma-\beta) \end{pmatrix}\vec{f}\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{f} - \overrightarrow{f'}\right]$, wobei $\overrightarrow{f'}$ der an der zu c' parallelen Ursprungsgeraden c'' gespiegelte Vektor $\vec{f}$ ist.

Dann ist $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OG} = \vec{f} - \frac{1}{2}\left[\vec{f} - \overrightarrow{f'}\right] = \frac{1}{2}\vec{f} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f'} = \frac{1}{2}\left[\vec{f} + \overrightarrow{f'}\right]$. Der Vektor $\vec{f}$ wird also zerlegt in

$\frac{1}{2}\left[\vec{f} - \overrightarrow{f'}\right]$, der senkrecht zu c' verläuft und die Lage von c' in der Ebene bestimmt, und in

$\frac{1}{2}\left[\vec{f} + \overrightarrow{f'}\right]$, der parallel zu c' verläuft und den Schubanteil der Schubspiegelung ausmacht.

Erweiterung

Gegeben ist eine Abbildung mit der Gleichung $F: \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = S\vec{x} + \vec{d}$,

also die Verknüpfung einer Spiegelung mit einer Verschiebung. Zerlegt man den Verschiebungsvektor $\vec{d}$ in die Komponenten $\vec{d}_\perp$ senkrecht zur Spiegelachse der Spiegelung und $\vec{d}_\parallel$ parallel zur Spiegelachse, so bestimmt $\vec{d}_\perp$ die Lage der Spiegelachse und $\vec{d}_\parallel$ ist der

Schubspiegelungsanteil. Wie bestimmt man zur gegebenen Abbildungsgleichung die beiden Komponenten $\vec{d}_\perp$ und $\vec{d}_{||}$?

Wendet man die Abbildungsgleichung von F zwei Mal an, so hebt sich die Spiegelung auf und es ergibt sich die zweimalige Verschiebung mit $\vec{d}_{||}$. Also gilt:

$(F \circ F): \vec{x}\,'' = S\cdot\left[S\vec{x} + \vec{d}\right] + \vec{d} = S\cdot S\cdot\vec{x} + S\vec{d} + \vec{d} = \vec{x} + S\vec{d} + \vec{d}$. Also ist $2\vec{d}_{||} = S\vec{d} + \vec{d}$.

Folglich ist $\vec{d}_{||} = \frac{1}{2}\left(S\vec{d} + \vec{d}\right)$ und $\vec{d}_\perp = \vec{d} - \vec{d}_{||} = \vec{d} - \frac{1}{2}\left(S\vec{d} + \vec{d}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{d} - S\vec{d}\right)$.

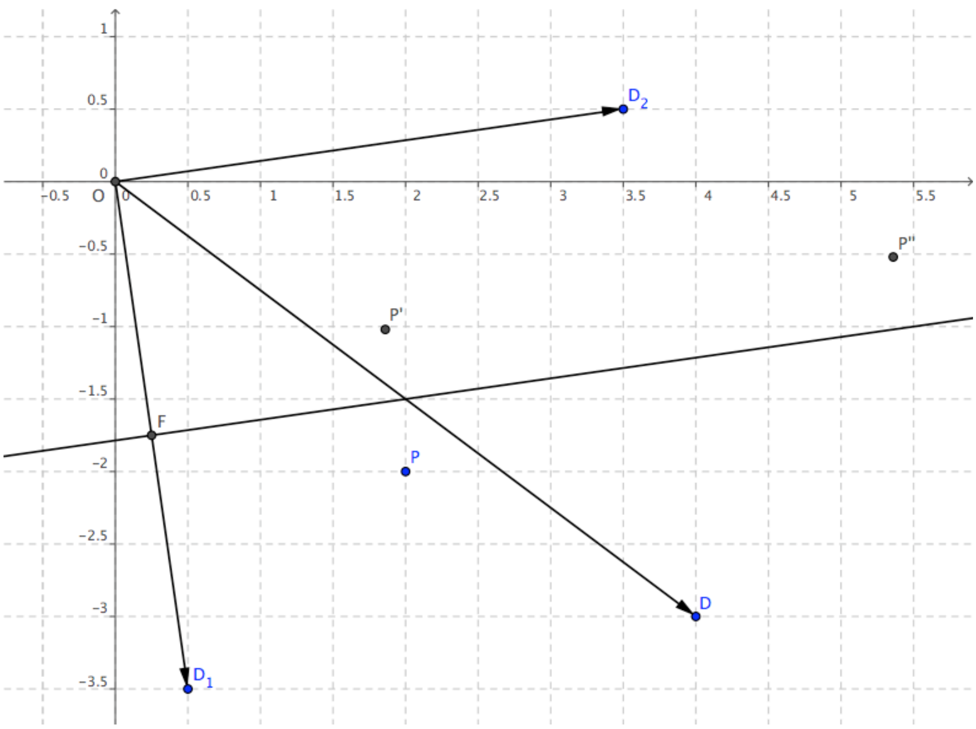
Beispiel:

Gegeben ist die Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $S\vec{d} = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Also gilt $\vec{d}_{||} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{d}_\perp = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$. Damit verläuft die Spiegelachse durch den Punkt F(0,25 ; -1,75)

In der nachfolgenden Abbildung ist $\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{d}_\perp = \overrightarrow{\mathrm{OD}_1}$ und $\vec{d}_{||} = \overrightarrow{\mathrm{OD}_2}$



Spiegelt man P(2;-2) an der Spiegelachse durch F und verschiebt das Bild P' mit $\vec{d}_{||} = \overrightarrow{\mathrm{OD}_2}$, so erhält man P''.

Bildet man P mit der Abbildungsgleichung ab, so erhält man:

$\vec{p}\,'' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}36 \\ -0{,}52 \end{pmatrix}$, was in Übereinstimmung mit der Abbildung ist.