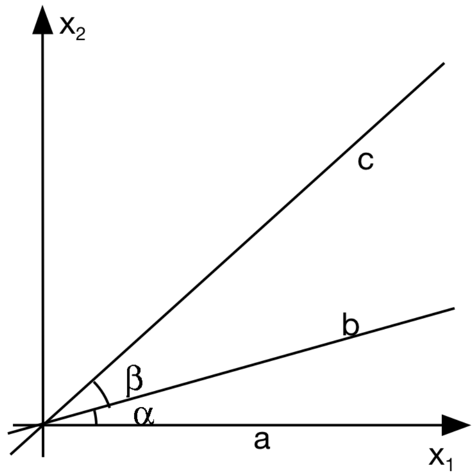
$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$ berechnet. Die Ergebnismatrix ist eine Drehmatrix (Vorzeichen beachten!) für den Drehwinkel 2α.

Damit ist durch diese Rechnung gezeigt:

Die Spiegelung an zwei sich schneidende Spiegelachsen, die einen Winkel α einschließen, ist eine Drehung um den Schnittpunkt beider Geraden mit dem Drehwinkel 2α.

Verknüpfung von drei Spiegelungen

a) Gegeben sind drei Spiegelungsachsen a, b und c, die sich in einem Punkt schneiden. $|\sphericalangle a,b| = \alpha$ und $|\sphericalangle b,c| = \beta$



Auch hier wählt man das Achsenkreuz günstig, indem man den Ursprung in den Schnittpunkt der drei Achsen legt und die x_1-Achse auf die erste Spiegelachse a. Dann schließt die zweite Spiegelachse b mit der x_1-Achse einen Winkel α ein und c einen Winkel von $\alpha+\beta$ mit der x_1-Achse.
Da alle drei Achsen durch den Ursprung laufen, kann man sofort die Abbildungsgleichungen für alle drei Spiegelungen hinschreiben:

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = A \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x''} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x'} = B \cdot \vec{x'}$$

$$\vec{x'''} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha+\beta) & \sin 2(\alpha+\beta) \\ \sin 2(\alpha+\beta) & -\cos 2(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \vec{x''} = C \cdot \vec{x''}$$

Die Verkettung ist dann $\vec{x'''} = C \cdot B \cdot A \cdot \vec{x}$, es kommt also darauf an, das Produkt der 3 Matrizen zu bilden.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$ (siehe oben), so dass noch berechnet werden muss:

$C \cdot (B \cdot A) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha+\beta) & \sin 2(\alpha+\beta) \\ \sin 2(\alpha+\beta) & -\cos 2(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. Dieses Produkt auszuführen ist umfangreich, es wird in die einzelnen Komponenten der Ergebnismatrix $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ zerlegt.

$$d_{11} = \cos 2(\alpha+\beta) \cdot \cos 2\alpha + \sin 2(\alpha+\beta) \cdot \sin 2\alpha$$

Es ist hilfreich, das Ergebnis zu kennen, um bei der Umformung zielgerichtet vorzugehen. Die Verkettung der drei Spiegelungen ergibt eine Spiegelung an einer Achse, die mit der x_1-Achse einen Winkel von β einschließt. Im Ergebnis muss sich also ergeben:

$D = C \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$. Das signalisiert, dass man bei der Umformung die Summe von α und β auflösen muss, nicht aber die doppelten Winkel.

$$\begin{aligned} d_{11} &= \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\alpha \\ &= (\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta)\cdot\cos 2\alpha + (\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta)\cdot\sin 2\alpha \\ &= \cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\alpha \end{aligned}$$

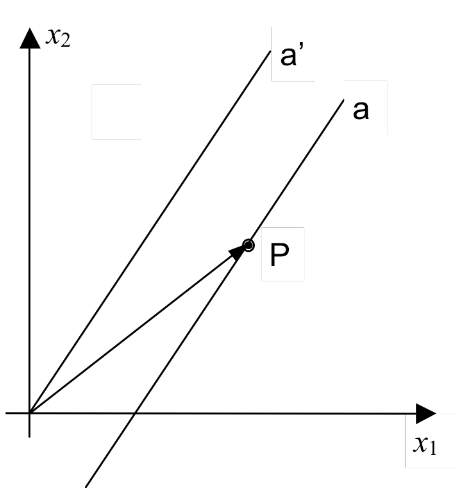
In der letzten Zeile heben sich der 2. und der 4. Summand auf, im 1. und 3. Summand kann man $\cos 2\beta$ ausklammern:

$$\begin{aligned} d_{11} &= (\cos 2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sin 2\alpha)\cdot\cos 2\beta \\ &= 1 \cdot\cos 2\beta \\ &= \cos 2\beta \end{aligned}$$

Die Rechnungen für die verbleibenden Komponenten d_{12}, d_{21}, d_{22} verlaufen ganz analog und sind eine hervorragende Übung für das Rechnen mit Winkelfunktionen.
Damit ist das **Ergebnis** gezeigt.

> Die Spiegelung an drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt schneiden und Winkel der Größe $\alpha = |\sphericalangle g_1, g_2|$ bzw. $\beta = |\sphericalangle g_2, g_3|$ einschließen, lassen sich zu einer Geradenspiegelung an einer Geraden $\overline{g}$ zusammenfassen. Dabei ist der Winkel zwischen g_1 und $\overline{g}$ β.

Einschub: Die Spiegelung an einer Geraden, die nicht durch den Ursprung verläuft



In den folgenden beiden Abschnitten spielen Spiegelungen eine Rolle, deren Achsen nicht durch den Ursprung verlaufen. Daher soll als Einschub dieser Fall zunächst betrachtet werden und eine allgemeingültige Abbildungsgleichung dafür hergeleitet werden.
Es sei a eine Gerade, die durch den Punkt $P(p_1; p_2)$ verläuft und die mit der x_1-Achse einen Winkel von α einschließt. Die Spiegelung an dieser Geraden lässt sich durch folgende, mit ihrer Abbildungsgleichung bereits bekannten Abbildungen erzeugen:

1. Verschiebung des Punktes P in den Ursprung. Der Verschiebungsvektor ist also $\begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$

Die Abbildungsgleichung lautet: $\vec{x}\,' = \vec{x} + \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$

2. Spiegelung an der verschobenen Geraden, die nun durch den Ursprung geht.

Diese Abbildungsgleichung lautet: $\vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\vec{x}\,'$

3. Zurückverschiebung gegenüber 1. also eine Verschiebung mit $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$.