Reimund Albers Geometrie erleben SoSe 07

13. Übung, Lösungsskizzen

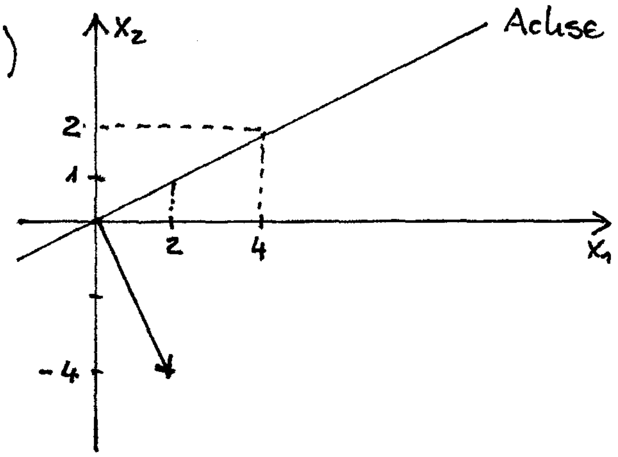
a) Involutorisch, also selbstinvers

Wendet man die Abbildung zwei Mal an, erhält man die Identität.

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

b)



Die Achse findet man

1. Lösung: $\cos 2\alpha = 0{,}6$

$\Rightarrow 2\alpha \approx 53{,}13°$

$\Rightarrow \alpha \approx 26{,}57°$

(ungenau)

2. Lösung: Man bildet den Punkt E_1 (1; 0 ab auf E_1' (0,6 ; 0,8) Der Vektor $\overrightarrow{E_1E_1'}$ ist $\begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$. Der dazu senkrechte Vektor ist $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$. Das entspricht der Geradensteigung $m = \frac{1}{2}$. (genauer Weg)

3. Lösungsweg: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ Die Spiegelachse ist die Winkelhalbierende zwischen beiden Vektoren (ungenau)

c) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 - 3{,}2 \\ 1{,}6 + 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +4 \end{pmatrix}$

Der Ergebnisvektor ist genau entgegengesetzt zum Ausgangsvektor. Das bedeutet, dass der Verschiebungsvektor senkrecht zur Spiegelachse verläuft.

---

d) 1. Lösungsweg: Man löst die Verschiebung auf in zwei Spiegelungen. Die Achsen sind parallel zur Spiegelungsachse der durch die Matrix gegebenen Spiegelung. Der Abstand ist die halbe Länge des Verschiebungsvektors. Legt man die erste Achse auf die Achse der „Matrixspiegelung", also durch O, so verläuft die zweite Achse durch (1; −2). Das ist die SpAchse für die Gesamtabbildung.

2. Lösungsweg: Man bildet einen Punkt A ab. Die Spiegelungsachse ist dann die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$

3. Lösungsweg: Man sucht Beispiele für Fixpunkte

Ansatz: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x} \iff \begin{cases} -0{,}4\,x_1 + 0{,}8\,x_2 = -2 \\ 0{,}8\,x_1 - 1{,}6\,x_2 = 4 \end{cases}$

Man sieht, dass 1. Gl. · (−2) = 2. Gl.

~~Beisp~~ Auflösen einer Gleichung nach x_2:

$x_2 = \frac{1}{2}x_1 - 2{,}5$ Das ist die Gleichung der Spiegelungsachse

Hausübung

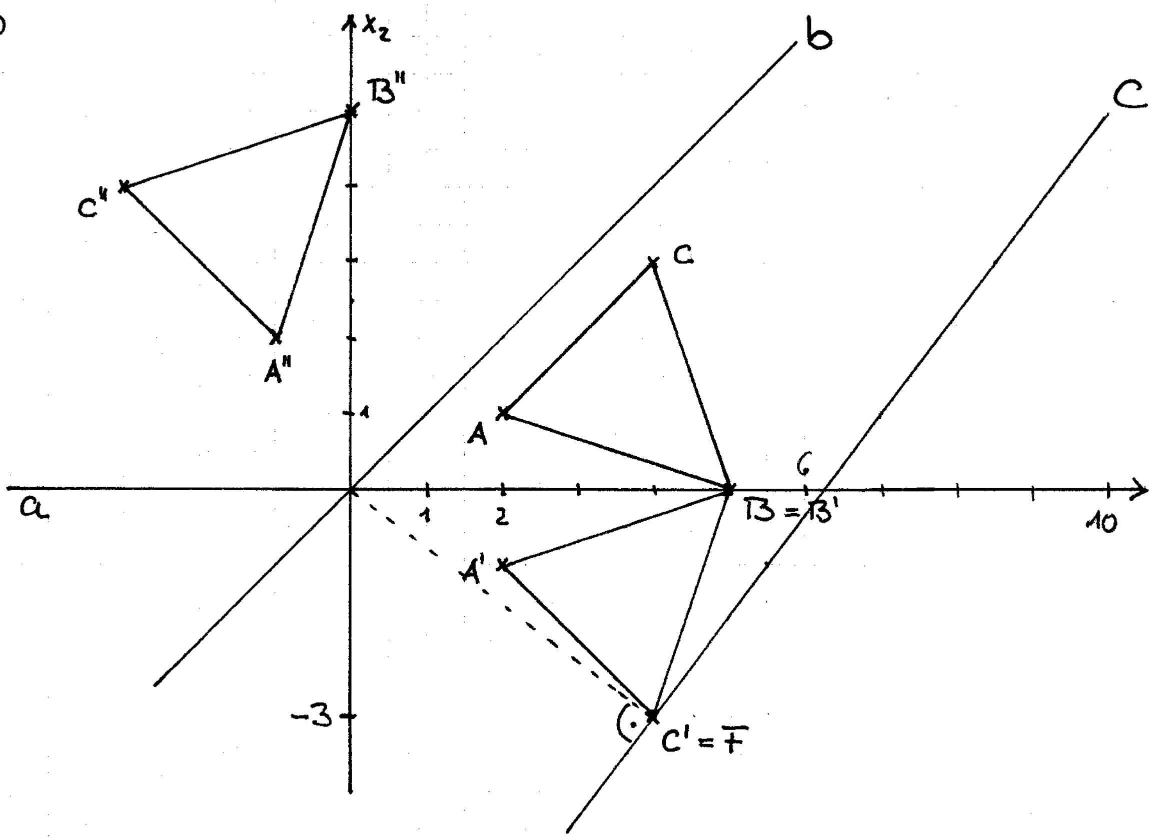
2\.

a) Die Achse a ist die x_1-Achse
Die Achse b schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein. Also $x_2 = x_1$

$$\begin{pmatrix} -0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & 0{,}28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}24 - 5{,}76 \\ 7{,}68 - 1{,}68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

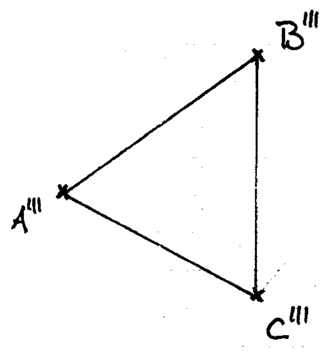
Also ist $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Spiegelachse.
Die hat dann die Richtung $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Geradensteigung $m = \frac{4}{3}$.
Der Verschiebungsvektor ist dann $2 \cdot \overrightarrow{OF}$ mit F Fußpunkt des Lots von O auf die Gerade c. Also $F(+4; -3)$

b



Aus der Zeichnung kann man ablesen
$A'''(10{,}2; -6{,}5)$ $B'''(12{,}7; -4{,}6)$

$C'''(12{,}7; -7{,}8)$



c) $$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} -0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & 0{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}28 & 0{,}96 \\ 0{,}96 & 0{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Punkt $A(2;1)$

$$\vec{a}''' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}2 \\ -6{,}4 \end{pmatrix} \quad A'''(10{,}2;\ -6{,}4)$$

Punkt $B(5;0)$

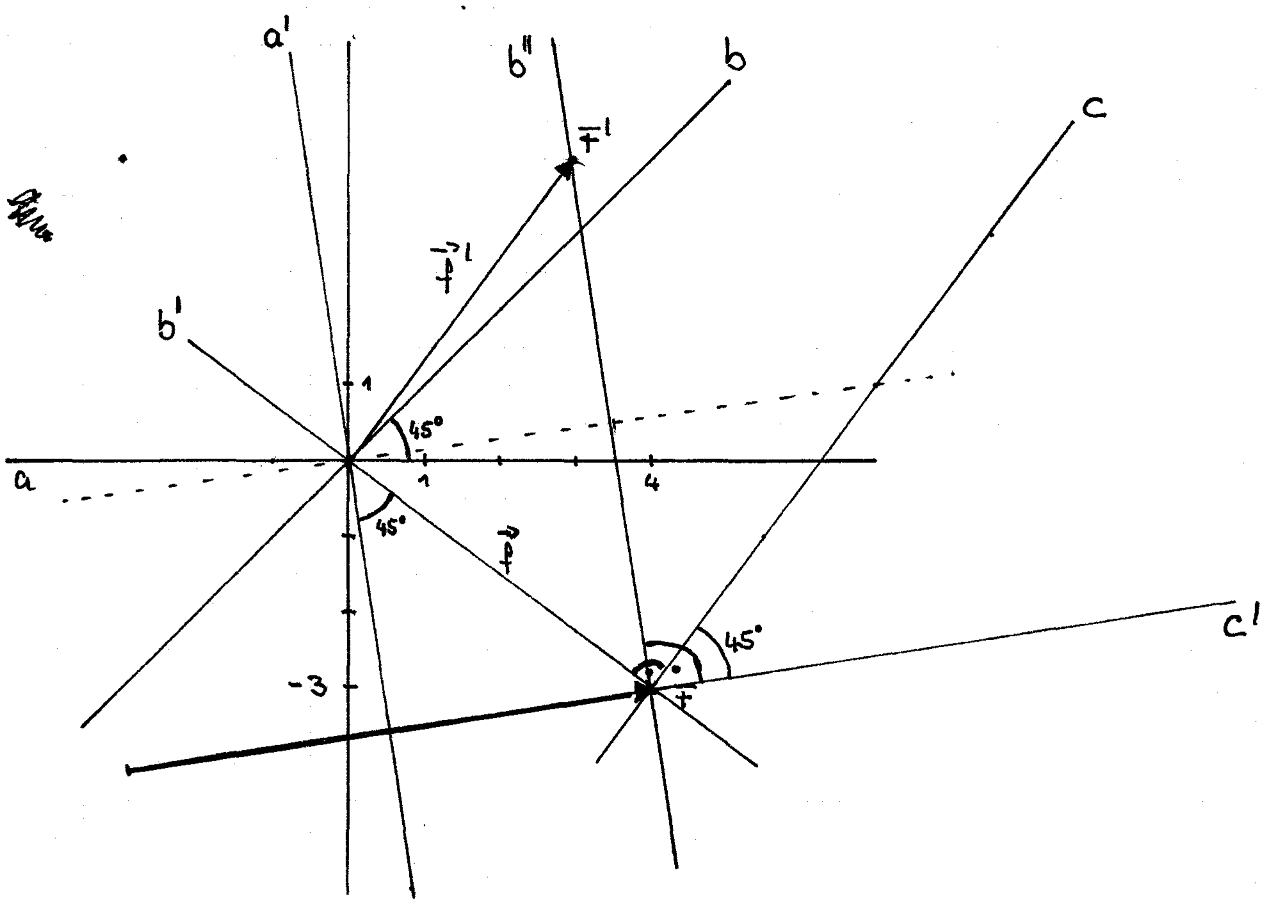
$$\vec{b}''' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}8 \\ -4{,}6 \end{pmatrix} \quad B'''(12{,}8;\ -4{,}6)$$

Punkt $C(4;3)$

$$\vec{c}''' = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}28 \\ 0{,}28 & -0{,}96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}68 \\ -7{,}76 \end{pmatrix} \quad C'''(12{,}68;\ -7{,}76)$$

Die Rechnung stimmt gut mit den zeinerisch ermittelten Werten überein.

d)



Aus der Zeichnung kann man ablesen:

Winkel von c' zur x_1- Achse 9°

Vektor für die Verschiebung parallel zu c'

$$\vec{d} \approx \begin{pmatrix} 6,9 \\ 1,1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsgl. für $S_c \circ S_b \circ S_a$ ist (siehe c.)

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,28 \\ 0,28 & -0,96 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Der Winkel für die Achse ist dann

$$\cos 2\alpha = 0,96 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha \approx 16,26° \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 8,13°$$

Da $F(4;-3)$, ist $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\vec{f}' = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,28 \\ 0,28 & -0,96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} + f' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beide Angaben stimmen gut mit den zeichnerisch ermittelten Werten überein.

e) Punkte auf a: $O(0;0)$ und $R(1;0)$

Punkte auf b: $O(0;0)$ und $S(1;1)$

Punkte auf c: $F(4;-3)$ und $T(7;1)$

Probe für F und T durch Einsetzen in die Gleichung für S_c

$$\vec{f}^* = \begin{pmatrix} -0,28 & 0,96 \\ 0,96 & 0,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\vec{t}^* = \begin{pmatrix} -0,28 & 0,96 \\ 0,96 & 0,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe zum räuml. Vorst.

Der Körper besteht aus $3 + 6 + 3 = \underline{\underline{12}}$ Flächen

$\rightarrow$ 24 Flächenecken mit stumpfen W. $\xrightarrow{:3}$ 8 Ecken

24 " " spitzen W. $\xrightarrow{:4}$ 6 Ecken

zusammen $\underline{\underline{14}}$ Ecken

12 Flächen $\xrightarrow{\cdot 4}$ 48 Flächenkanten $\xrightarrow{:2}$ $\underline{\underline{24}}$ Körperkanten