Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07

12. Übung, Lösungsskizzen

1. Gegeben $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$

a) Gewählt: $A(1,2)$ $B(-1,3)$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Gl für die inverse Abb

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$1 = 10a_{11} - 7a_{12}$ ① $\qquad -1 = 5a_{11} - 3a_{12}$ ③

$2 = 10a_{21} - 7a_{22}$ ② $\qquad 3 = 5a_{21} - 3a_{22}$ ④

①: $10a_{11} - 7a_{12} = 1$

③: $5a_{11} - 3a_{12} = -1 \quad | \cdot 2 \quad -$

$-a_{12} = 3$

$a_{12} = -3$

in ① $10a_{11} = 1 + 7\cdot(-3)$

$10a_{11} = -20$

$a_{11} = -2$

②: $10a_{21} - 7a_{22} = 2$

④: $5a_{21} - 3a_{22} = 3 \quad \cdot 2 \quad -$

$-a_{22} = -4$

$a_{22} = 4$

in ② $10a_{21} = 2 + 7\cdot 4$

$10a_{21} = 30$

$a_{21} = 3$

Gleichung der inversen Abb. $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}'$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ob. li.: $4a_{11} + 3a_{21} = 1 \quad \cdot 2$

unt. li: $-3a_{11} - 2a_{21} = 0 \quad \cdot 3 \quad +$

$-a_{11} = 2$

$a_{11} = -2$

ob. re.: $4a_{12} + 3a_{22} = 0 \quad \cdot 2$

unt ~~ob~~. re.: $-3a_{12} - 2a_{22} = 1 \quad \cdot 3 \quad +$

$-a_{12} = 3$

$a_{12} = -3$

unten li. einsetzen

$$-2a_{21} = 3\cdot(-2)$$
$$a_{21} = 3$$

oben re. einsetzen

$$3a_{22} = -4\cdot(-3)$$
$$a_{22} = +4$$

also ist die inverse Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. Drehung um α

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Drehung um $-\alpha$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

Multiplikation, Regeln für negative Winkel

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Einheitsmatrix

Hausübungen

3.a) S_1: Spiegelung an der x_1-Achse

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

S_2: Spiegelung an Gerade mit $\alpha = 45°$

$$\vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}\,'$$

S_3: Spiegelung mit geg. Matrix

$$\vec{x}\,''' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}\vec{x}\,''$$

b) $\vec{p}\,' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix}$ $\qquad P'(5; -3)$

$\vec{p}\,'' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}$ $\qquad P''(-3; 5)$

$\vec{p}\,''' = \begin{pmatrix}-0{,}6 & 0{,}8\\ 0{,}8 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5{,}8\\ 0{,}6\end{pmatrix}$ $\qquad P'''(5{,}8; 0{,}6)$

c) Vergleich mit der allg. Spiegelungs~~gle~~matrix ergibt

$\cos 2\alpha = -0{,}6$ und $\sin 2\alpha = 0{,}8$

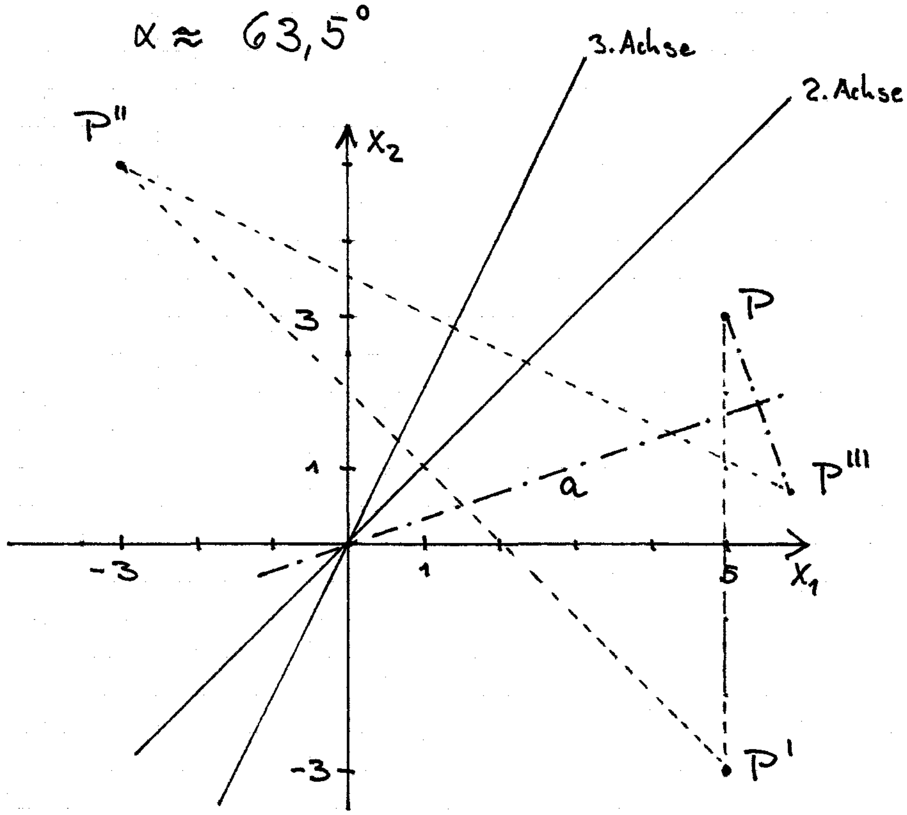
also $90° < 2\alpha < 270°$ $\qquad$ also $0 < 2\alpha < 180°$ $\Rightarrow$ $90° < 2\alpha < 180$

$2\alpha \approx 126{,}9°$

$\alpha \approx 63{,}5°$

d)

e)



Hier ergibt sich eine erste Kontrollmöglichkeit. Konstruiert man die Punkte durch Spiegelung, müssen die gezeichneten Punkte mit den in b) berechneten (ungefähr) übereinstimmen.

zu e) Kontrollmöglichkeit 2: Der Winkel von a zur x_1-Achse muss so groß sein wie der Winkel zwischen der 2. und 3. Achse

f) Nach dem Dreispiegelungssatz ergeben die drei Spiegelungen in der Verknüpfung wieder eine Achsenspiegelung, deren Achse durch den gemeinsamen Schnittpunkt verlauft, hier O.

g)

$$\vec{x}^{\,\prime\prime\prime} = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Das ist eine Achsenspiegelung. Winkel α für die Achse:

$$\cos 2\alpha = 0{,}8 \qquad \sin 2\alpha = 0{,}6$$

also α im Intervall $(0°; 90°)$

$$2\alpha \approx 36{,}9°$$

$$\alpha \approx 18{,}5°$$

Kontrolle 3: Winkel nachmessen

Kontrolle 4: Rechnung von $P \to P'''$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1{,}8 \\ 3 - 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \checkmark$$

4.

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} c_{11} + a_{12} b_{21} c_{11} + a_{11} b_{12} c_{21} + a_{12} b_{22} c_{21} \\ a_{21} b_{11} c_{11} + a_{22} b_{21} c_{11} + a_{21} b_{12} c_{21} + a_{22} b_{22} c_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} c_{12} + a_{12} b_{21} c_{12} + a_{11} b_{12} c_{22} + a_{12} b_{22} c_{22} \\ a_{21} b_{11} c_{12} + a_{22} b_{21} c_{12} + a_{21} b_{12} c_{22} + a_{22} b_{22} c_{22} \end{pmatrix}$$

Schönheit und Harmonie:

- Auch hier sind die Faktoren in einem Produkt verkettet $a_{21}\, b_{12}\, c_{22}$
- Erster und letzter Index geben die Position in der Ergebnismatrix an, hier 2,2 also unten rechts. Diese Indizes sind für alle 4 Summanden gleich
- Vergleicht man das obere Element mit dem darunterstehenden, so ist in jedem Summanden bei a der erste Index oben 1, unten 2,

$a_{11}\, b_{11}\, c_{11} + \ldots$ $a_{21}\, b_{11}\, c_{11} + \ldots$	alle anderen Indizes sind genau gleich.

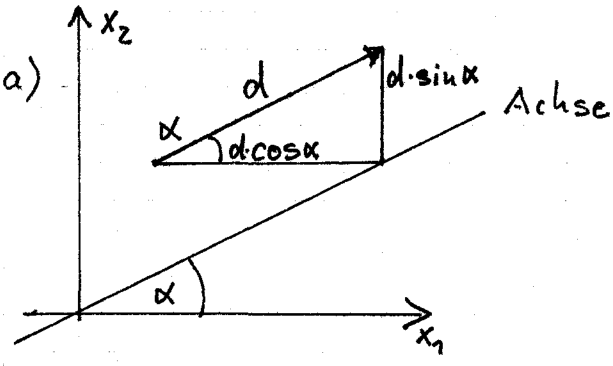
$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} c_{11} + b_{12} c_{21} & b_{11} c_{12} + b_{12} c_{22} \\ b_{21} c_{11} + b_{22} c_{21} & b_{21} c_{12} + b_{22} c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} c_{11} + a_{11} b_{12} c_{21} + a_{12} b_{21} c_{11} + a_{12} b_{22} c_{21} \\ a_{21} b_{11} c_{11} + a_{21} b_{12} c_{21} + a_{22} b_{21} c_{11} + a_{22} b_{22} c_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} b_{11} c_{12} + a_{11} b_{12} c_{22} + a_{12} b_{21} c_{12} + a_{12} b_{22} c_{22} \\ a_{21} b_{11} c_{12} + a_{21} b_{12} c_{22} + a_{22} b_{21} c_{12} + a_{22} b_{22} c_{22} \end{pmatrix}$$

Beide Endergebnisse sind gleich, in den Summen sind nur 2. und 3. Summand in der Reihenfolge vertauscht.

5. a)



Wegen der Matrix weiß man, dass die Achse zur x_1-Achse den Winkel α einschließt

Der Verschiebungsvektor schließt ebenfalls zur waagerechten Richtung den Winkel α ein.

b) $T: \ \vec{x}\,' = \vec{x} + \begin{pmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{pmatrix}$

$S: \ \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x}$

c) $S \circ T: \ \vec{x}\,'' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{pmatrix} \right]$

$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} d\cos 2\alpha\cos\alpha + d\sin 2\alpha\,^{\sin\alpha} \\ d\sin 2\alpha\cos\alpha - d\cos 2\alpha\,_{\sin\alpha} \end{pmatrix}$

Der Term für den Verschiebungsvektor kann durch auflösen der doppelten Winkel ~~umgeformt~~ vereinfacht werden.

$d\left((\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\right)$
$= d\left(\cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha\cos\alpha\right)$
$= d\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$
$= d\cos\alpha$

x_1-Kompon.

$d\left(2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\right)$
$= d\left(2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha\right)$
$= d\sin\alpha\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$
$= d\sin\alpha$

x_2-Kompon.

Der Verschiebungsvektor bleibt also unverändert

$$T \bullet S: \quad \vec{x}'' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} d \cos\alpha \\ d \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass in diesem Fall S und T vertauschbar sind.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsv.

Abzählen liefert $\left.\begin{array}{r} 18 \text{ Quadrate} \\ 8 \text{ Dreiecke} \end{array}\right\} \underline{\underline{26 \text{ Flächen}}}$

Das sind $18 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 96$ Ecken (der Flächen)

In jeder Raumecke stoßen 4 Flächenecken zusammen. Also hat der Körper $96 : 4 = \underline{\underline{24 \text{ Ecken}}}$

Analog zu den Flächenecken gibt es 96 Flächenkanten. Je zwei bilden eine Körperkante. Also gibt es $\underline{\underline{48 \text{ Kanten}}}$