Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07

11. Übung, Lösungsskizzen

1. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 3 & 2\cdot 2+3\cdot 1 \\ (-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot 3 & (-3)\cdot 2+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 & -3-2 \\ 6-3 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ.

2. $D_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad D_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

$D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$

nach den Additionstheoremen ergibt sich dann

$D_2 \cdot D_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

Das ist die Matrix für die Drehung um O mit $\alpha+\beta$

Hausübungen

3a) Mit $\cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$

Also hat die Matrix die Form $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, also die einer Drehung.

Nach der Drehung wird eine Verschiebung ausgeführt.

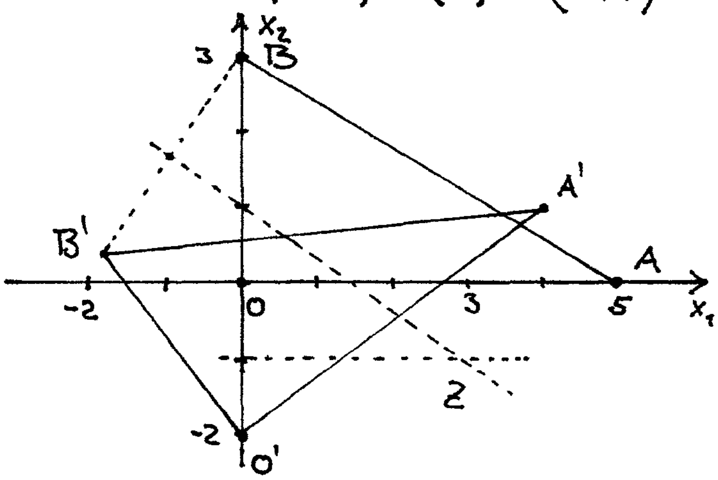
Die Verknüpfung zweier gleichsinniger Abbildungen ist wieder eine gleichsinnige Abbildung. Es kann keine (reine) Verschiebung sein, folglich muss es eine Drehung sein

Die Drehung lässt sich in zwei Spiegelungen auflösen (Geraden schneiden sich), die Verschiebung ebenfalls (Geraden sind parallel)

(siehe 8. Übung Aufg 4)

b) $O'(0;-2)$ $\quad \vec{a}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A'(4;1)$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\quad B'(-1{,}8;0{,}4)$



Laut Zeichnung:

$Z(2{,}9;-1)$

c) Berechnung des Fixpunktes

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} z_1 &= 0{,}8 z_1 - 0{,}6 z_2 \\ z_2 &= 0{,}6 z_1 + 0{,}8 z_2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}2 z_1 + 0{,}6 z_2 &= 0 \\ -0{,}6 z_1 + 0{,}2 z_2 &= -2 \end{aligned}$$ hat als Lösung $z_1 = 3 \quad z_2 = -1$

rechnerische Lösung: $Z(3;-1)$

4. Drehung um O um $90°$

$$D_{90} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $A(3;1)$ Liegt auf $x_2 = \frac{1}{3} x_1$

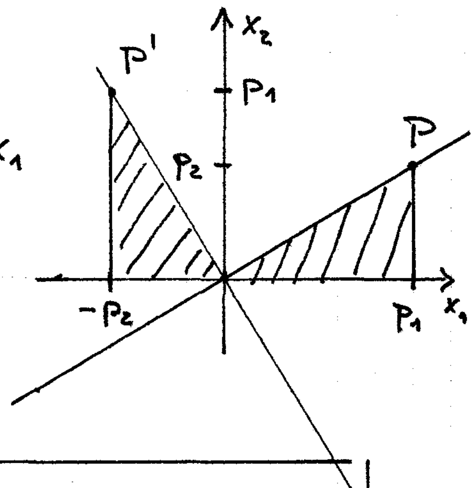
$\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Also $A'(-1;3)$

$A'(-1;3)$ Liegt auf $x_2 = -3x_1$

b) $B(4;5)$ Liegt auf $x_2 = \frac{5}{4} x_1$

$\vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Liegt auf $x_2 = -\frac{4}{5} x_1$

Man kann vermuten, dass zur Geraden
$x_2 = \frac{r}{s} x_1$ die senkrechte Ursprungsgerade lautet
$x_2 = -\frac{s}{r} x_1$ (negativer Kehrwert)



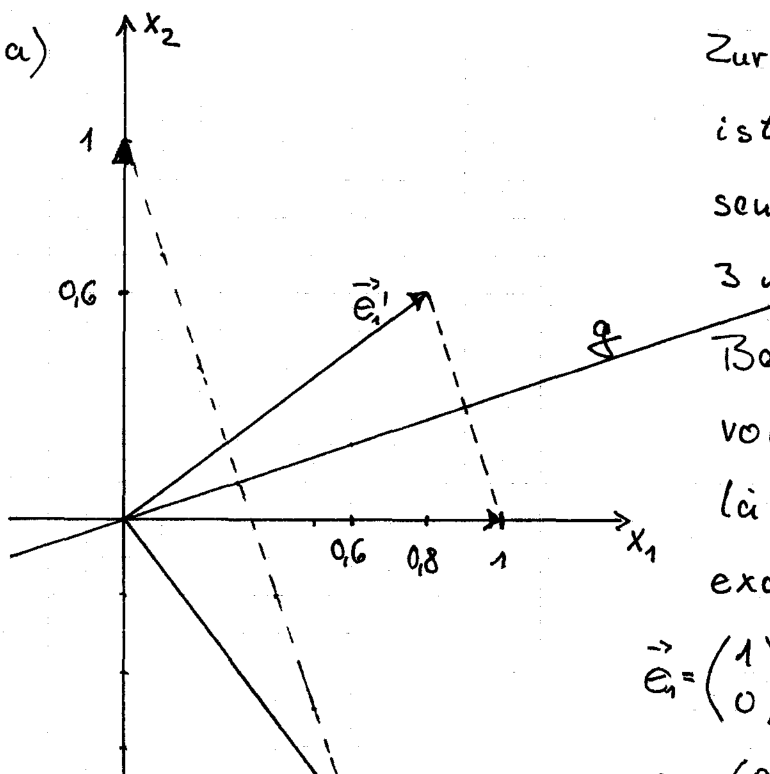
c) $P(p_1; p_2)$ liegt auf $x_2 = \frac{p_2}{p_1} x_1$

$$\vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

$P'(-p_2; p_1)$ liegt auf $x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1$

Also: Zur Steigung $m = \frac{r}{s}$ ist
die senkrechte Steigung $m_\perp = -\frac{s}{r}$
(negativer Kehrwert)

5. a)



Zur Gerade $x_2 = \frac{1}{3} x_1$
ist die Steigung -3
senkrecht (1 nach rechts, 3 nach unten)

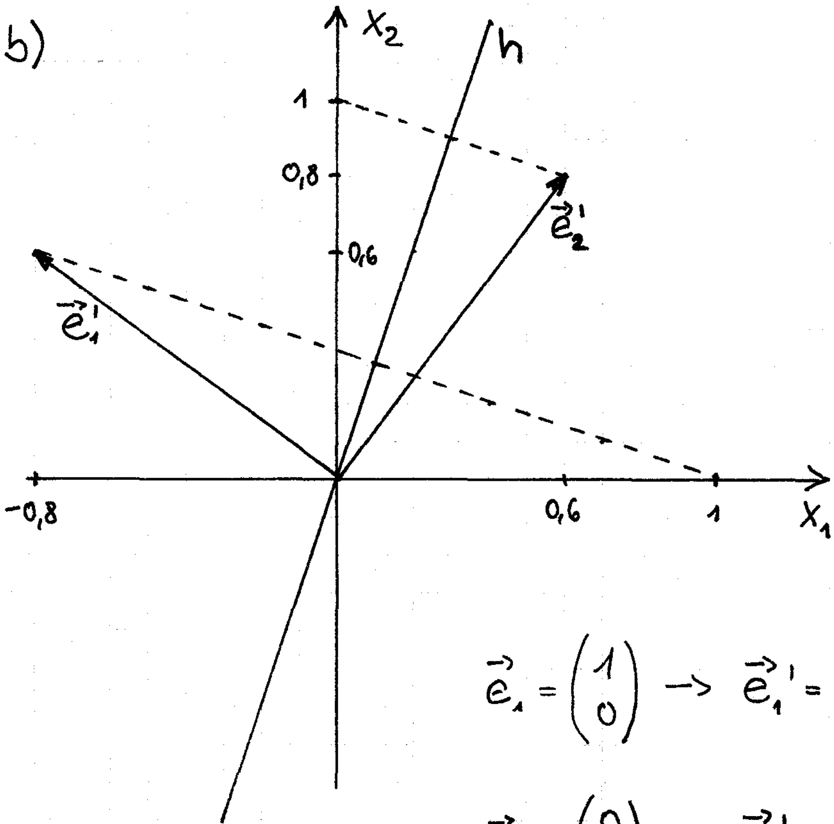
Beim gegebenen Maßstab von 1 LE ≙ 10 Kästchen lässt sich das Spiegeln exakt durchführen.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$

b)



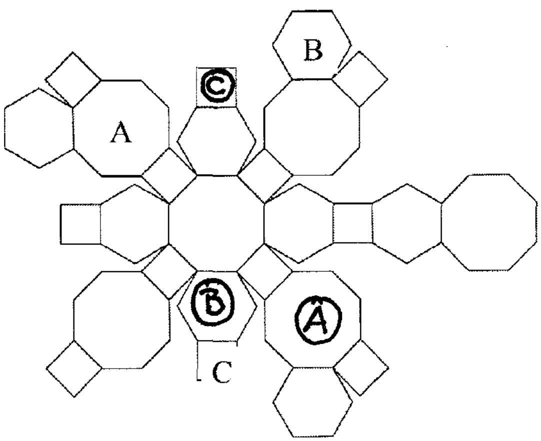
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

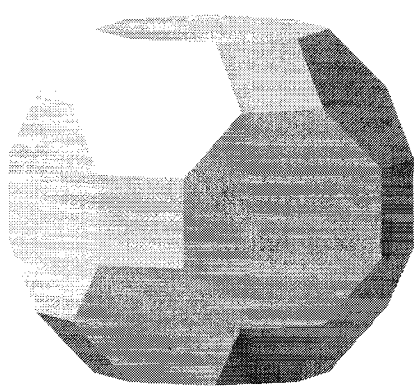
$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_2\,' = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix: $\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

---

5. Die beiden nachfolgenden Abbildungen zeigen das Netz eines Körpers und den Körper selbst.





Bestimmen Sie die Flächen, die den markierten Flächen gegenüber liegen.