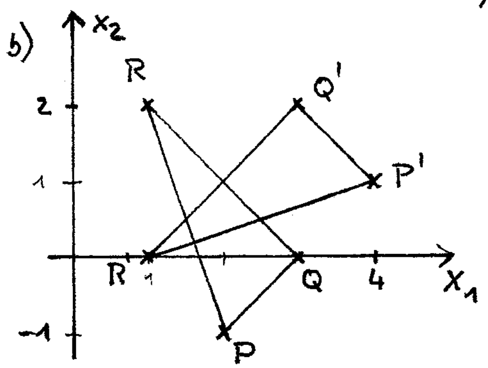
Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07
10. Übung, Lösungsskizzen

1. In Koordinaten: $x_1' = 3 - x_2 \qquad x_2' = x_1 - 1$

a) $P(2;-1) \to P'(4;1) \qquad Q(3;0) \to Q'(3;2)$

$R(1;2) \to R'(1;0)$

b)



Es sieht so aus, als ob $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$

~~[illegible]~~ Der Drehsinn bleibt erhalten

$\to$ Es kann eine Drehung sein.

c) $|PR| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$

$|P'R'| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

d) Die Abbildung ist eine Drehung um $Z(2;1)$ um $\alpha = 90^\circ$

Hausübungen

2a. Es fällt auf, dass in beiden Zeilen r und s vorkommen. Das wird der Vektor $\binom{r}{s}$ oder $\binom{s}{r}$.

$$\left.\begin{array}{l} u = a\cdot r + 2g\cdot s - 2h \\ v = -b\cdot r + m\cdot s + 5k \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2g \\ -b & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2h \\ 5k \end{pmatrix}$$

oder
$$\left.\begin{array}{l} u = 2g\cdot s + a\cdot r - 2h \\ v = m\cdot s - b\cdot r + 5k \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g & a \\ m & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2h \\ 5k \end{pmatrix}$$

2b) $c = 2a + 3b \quad \cdot 3$
$d = 3a + 5b \quad \cdot 2 \quad -$

$3c - 2d = -b$ also $b = -3c + 2d$

$c = 2a + 3b \quad \cdot 5$
$d = 3a + 5b \quad \cdot 3 \quad -$

$5c - 3d = a$ also $a = 5c - 3d$

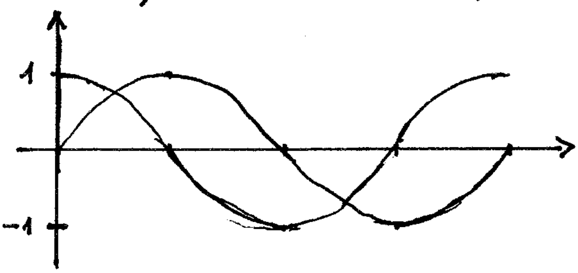
$$\left.\begin{array}{l} a = 5c - 3d \\ b = -3c + 2d \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

3. Da die Koeffizienten mit verschiedenem Vorzeichen auf der Hauptdiagonalen stehen (\\), handelt es sich um eine Spiegelung

Also $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

$\cos 2\alpha = -0{,}8$

$\sin 2\alpha = 0{,}6$



$\arccos(-0{,}8) \approx 143 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 71{,}5°$

a) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Verschiedene Vorzeichen a.d. Nebendiagonalen → Drehung

$\cos\alpha = 0{,}8 \quad \sin\alpha = -0{,}6$ also $270° < \alpha < 360°$

$\arccos(0{,}8) \approx 36{,}°$ also $\alpha = 360° - 36° = 324°$

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$ Spiegelung

$\cos 2\alpha = 0{,}8$ und $\sin 2\alpha = 0{,}6$

Also $2\alpha \approx 36°$ $\alpha \approx 18°$

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Drehung

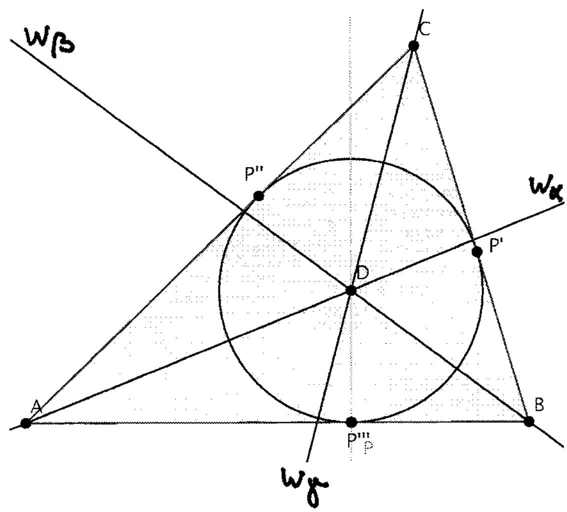
$\cos \alpha = 0{,}8$ und $\sin \alpha = 0{,}6$

Also $\alpha \approx 36°$

3b. Es gibt 4 Positionen, auf die 2 Minuszeichen verteilt werden sollen.
Herausgreifen der Positionen „ohne Zurücklegen", ohne Berücksichtigung d. Reihenfolge
$\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten

Die Minuszeichen führen entweder zu Vorzeichenwechseln in beiden Diagonalen $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ oder zu keinem Vorzeichenwechsel $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$. Alle Formen passen weder zu einer Drehung noch einer Spiegelung.

4.



Das Bild zeigt eine Situation für $P = P'''$

a) Offensichtlich stimmen $P = P'''$ mit dem Berührpunkt des Inkreises mit $\overline{AB}$ überein.

b) Sei T der Berührpunkt des Inkreises k mit $\overline{AB}$. T wird durch S_{w_β} auf T' abgebildet. k wird durch S_{w_β} auf sich abgebildet, AB auf BC. Also muss T' auf k und auf BC liegen, d.h. T' ist der Berührpunkt von k mit BC. Ebenso wird T' durch S_{w_γ} auf T'' abgebildet, was der Berührpunkt von k mit CA sein muss. Weiterhin wird T''' durch S_{w_α} auf den Berührpunkt von k und AB abgebildet, das war aber T. Also wird T durch $S_{w_\alpha} \circ S_{w_\gamma} \circ S_{w_\beta}$ auf sich selbst abgebildet.

c) Offensichtlich wird der Schnittpunkt der 3 Winkelhalbierenden (im Bild D) durch $S_{w_\alpha} \circ S_{w_\gamma} \circ S_{w_\beta}$ auf sich selbst abgeb.

da er auf allen drei Spiegelachsen liegt.

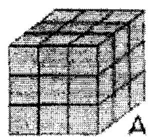
d) Die Verknüpfung $S_{w_\alpha} \circ S_{w_\gamma} \circ S_{w_\beta}$ ist als Verkn. von 3 Spiegelungen eine gegensinnige Abbildung (das Bild ist spiegelverkehrt zum Ausgangsobjekt), die Identität ist aber gleichsinnig. Nach dem Dreispiegelungssatz ergibt sich wieder eine Achsenspiegelung. Die Spiegelachse ist (die Gerade DP in der Abbildung) das Lot vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf die Seite $\overline{AB}$.

e) Analog ergibt $S_{w_\gamma} \circ S_{w_\beta} \circ S_{w_\alpha}$ eine Achsenspiegelung. Die Spiegelachse ist das Lot vom Schnittpunkt der Winkelhalbierenden auf die Seite $\overline{AC}$.

5.

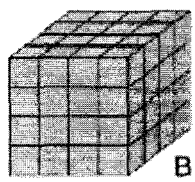
1. Jeder große Holzwürfel besteht aus vielen kleinen Würfeln. Wie viele kleine Würfel sind es?

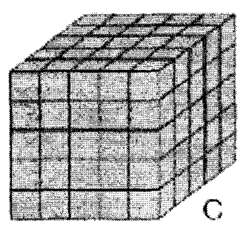
A: 27 $= 3^3$ B: 64 $= 4^3$ C: 125 $= 5^3$


A

2. Zahlix streicht jeden großen Würfel außen mit roter Farbe an. Wie sind die kleinen Würfel gefärbt?

So viele kleine Würfel haben ...	Würfel A	Würfel B	Würfel C
... drei rote Flächen	8	8	8
... zwei rote Flächen	12	24	36
... eine rote Flächen	6	24	54
... keine Farbe	1	8	27
Addiere zur Probe.	27	64	125


B


C