Reimund Albers Geometrie erleben SoSe 07

9. Übung, Lösungsskizzen

1. Verbesserte Aussagen:

a. Bei Spiegelungen ist die Strecke Punkt-Bildpunkt orthogonal zur Spiegelungsachse

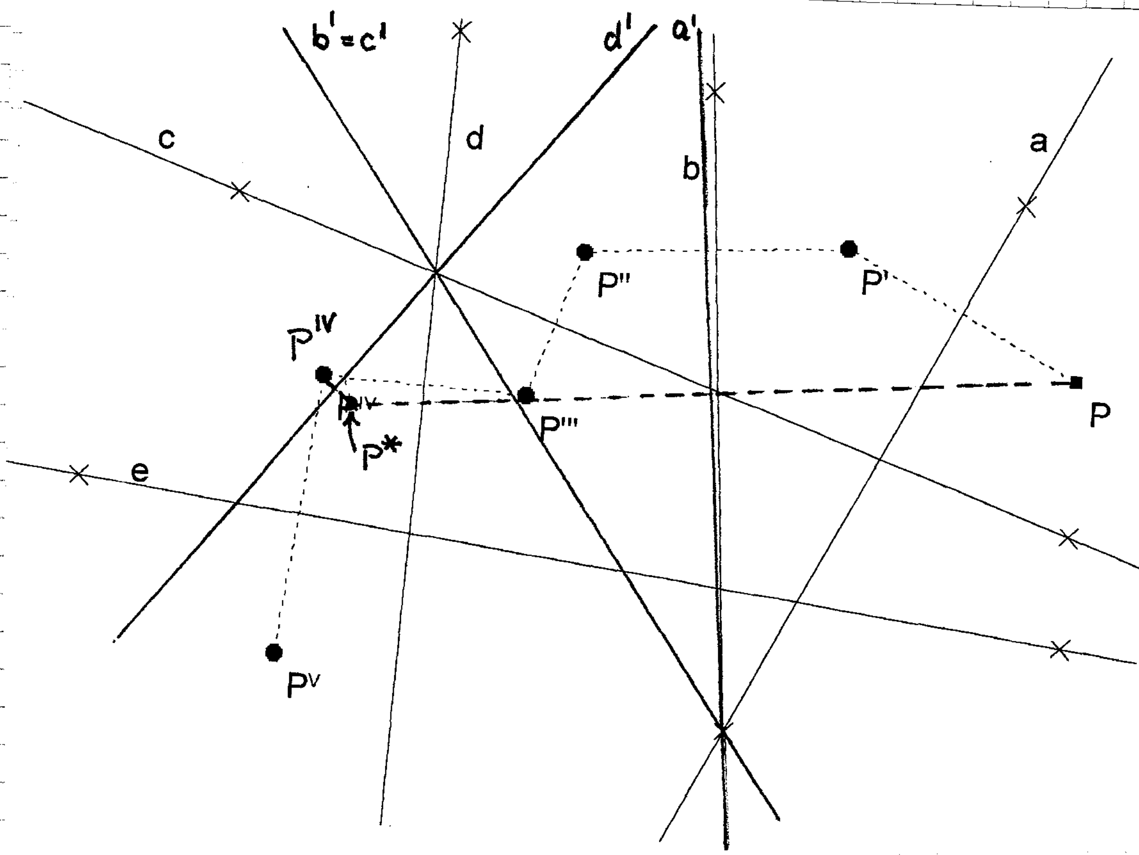
b. Bei einer Geradenspiegelung werden Geraden wieder auf Geraden abgebildet. Gerdenspiegelungen sind längentreu.

c. Die Spiegelung ist eine Kongruenzabbildung, die die Ebene auf sich abbildet.

d. „Eine Spiegelung ...." oder „Die Spiegelung bildet den ..."

e. Die Strecke Punkt-Bildpunkt verläuft senkrecht zur Achse" (siehe a.)

2.



Man verdreht a, b auf $a'b'$ mit b' durch $c \cap d$

Man verdreht c, d auf $c'd'$ mit $c' = b'$

$\Rightarrow S_e \circ S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_e \circ S_{d'} \circ \underbrace{S_{c'} \circ S_{b'}}_{id} \circ S_{a'} = S_e \circ S_{d'} \circ S_{a'}$

Ein zweiter Weg (nicht gezeichnet) könnte sein, dass man d, e so verdreht, dass d' durch b∩c verläuft. Dann verdreht man b, c auf b', c' mit c' = d'

$\Rightarrow S_e \circ S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = S_{e'} \circ \underbrace{S_{d'} \circ S_{c'}}_{id} \circ S_{b'} \circ S_a = S_{e'} \circ S_{b'} \circ S_a$

Man darf nur Geradenpaare verdrehen, deren zugehörige Spiegelungen direkt verknüpft sind. Nach S_a wird aber nicht direkt S_c ausgeführt. Also dürfen a und c nicht verdreht werden.

Hausübungen

3 c <u>Verknüpfung von zwei Drehungen</u>

$D_\beta \circ D_\alpha = D_{\alpha+\beta}$ $\quad \alpha+\beta$ mod 360 rechnen

Wandert man in einer Zeile entlang, nehmen die Winkel in 60°-Schritten zu. Bänder gleicher Drehungen verlaufen nach links unten

<u>Verknüpfung erst Spiegelung, dann Drehung</u>

formal: $D_\alpha \circ S_x = S_{y+\frac{\alpha}{2}} \circ S_y \circ S_x$

Setze $y = x$

$= S_{x+\frac{\alpha}{2}}$ $\quad x+\frac{\alpha}{2}$ mod 180 rechnen

Wandert man in einer Zeile entlang, nehmen die Winkel in 30°-Schritten zu. Bänder gleicher ~~Drehungen~~ Spiegelungen verlaufen nach links unten

<u>Verknüpfung erst Drehung, dann Spiegelung</u>

formal: $S_x \circ D_\alpha = S_x \circ S_y \circ S_{y-\frac{\alpha}{2}}$

Setze $x = y$

$= S_{x-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad x-\frac{\alpha}{2}$ mod 180 rechnen

		zweite Abbildung											
erste Abbildung		D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_{0}	S_{30}	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}
	D_{0}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}
	D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}
	D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}
	D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}
	D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X
	D_{300}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}
	S_{0}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
	S_{30}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}
	S_{60}	S_{60}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}	D_{180}
	S_{90}	S_{90}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}	D_{120}
	S_{120}	S_{120}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}	D_{60}
	S_{150}	S_{150}	S_{0}	S_{30} X	S_{60}	S_{90}	S_{120}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_{0}

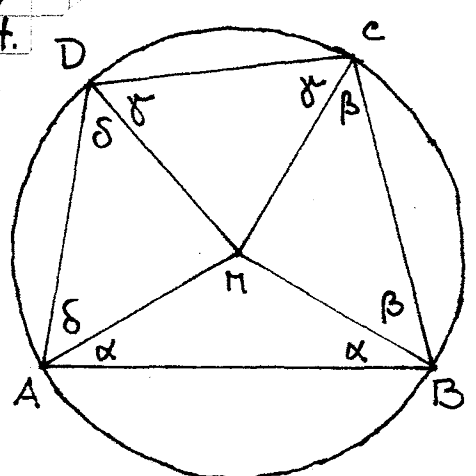
Wandert man in einer Zeile entlang, so nehmen die Winkel in 30°-Schritten zu.
Wandert man in einer Spalte herunter, so nehmen die Winkel in 30°-Schritten ab.
Bänder gleicher Spiegelungen verlaufen nach rechts unten.

Verknüpfung von zwei Spiegelungen

formal: $S_y \circ S_x \begin{cases} = D_{2(y-x)} & \text{für } y \geq x \\ = D_{360-2(x-y)} & \text{für } y < x \end{cases}$

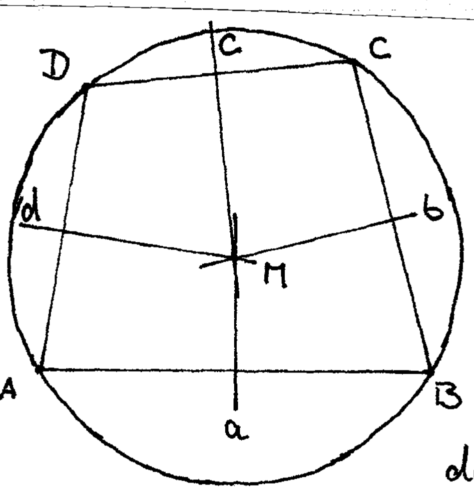
Wandert man in einer Zeile nach rechts, so nehmen die Winkel der Drehung in 60°-Schritten zu.
Wandert man in einer Spalte herunter, so nehmen die Winkel in 60°-Schritten ab.
Bänder gleicher Drehungen verlaufen nach rechts unten.

4.



a) Diese Gesetzmäßigkeit ist eine direkte Aussage des Peripheriewinkelsatzes.
Es geht aber auch direkt.
Da die Teildreiecke, die M als einen Punkt haben, gleichschenklig sind, gelten die eingezeichneten Regelmäßigkeiten in den Winkelgrößen. Dann ist die Summe von gegenüberliegenden Winkelgrößen $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Die Winkelsumme im gesamten Viereck ist $2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta = 360° \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$ q.e.d.

4



b) Da die vier Spiegelachsen durch M verlaufen, ist

$S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a = D_{M,\alpha}$

M ist offensichtlich Fixpunkt.

A ist sicher auch Fixpunkt,

denn $A \xrightarrow{S_a} B \xrightarrow{S_b} C \xrightarrow{S_c} D \xrightarrow{S_d} A$

c) Das bedeutet für die Drehung, dass $\alpha = 0°$ ist.

Damit ist die Drehung aber die Identität

5. a. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ Setzt man $\beta = 90° - \alpha$ ein, ergibt sich

$\sin(\alpha + 90° - \alpha) = \sin 90° = 1 = \sin\alpha\cos(90° - \alpha) + \cos\alpha\sin(90° - \alpha)$

Die Winkelfunktionen mit 90°-α kann man ersetzen durch $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ und $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ und erhält dann $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b. Bekannt: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\end{aligned}$$

Probe für $\alpha = 30°$: $\sin 3\alpha = \sin 90° = 1$

$3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin 30°\cdot\cos^2 30° - \sin^3 30°$

Mit $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ erhält man im letzten Term $3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$

c. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$

Die Kosinus-Funktion hat für $\alpha = 90°$ eine Nullstelle, folglich wird der Nenner 0.

d. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

Kürzt man diesen Bruch mit $\cos\alpha\cos\beta$, erhält man $\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$. Mit $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ erhält man das angegebene Ergebnis.

5

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

6. Verdrehter Würfel. Beschriften Sie die übrigen Ecken.