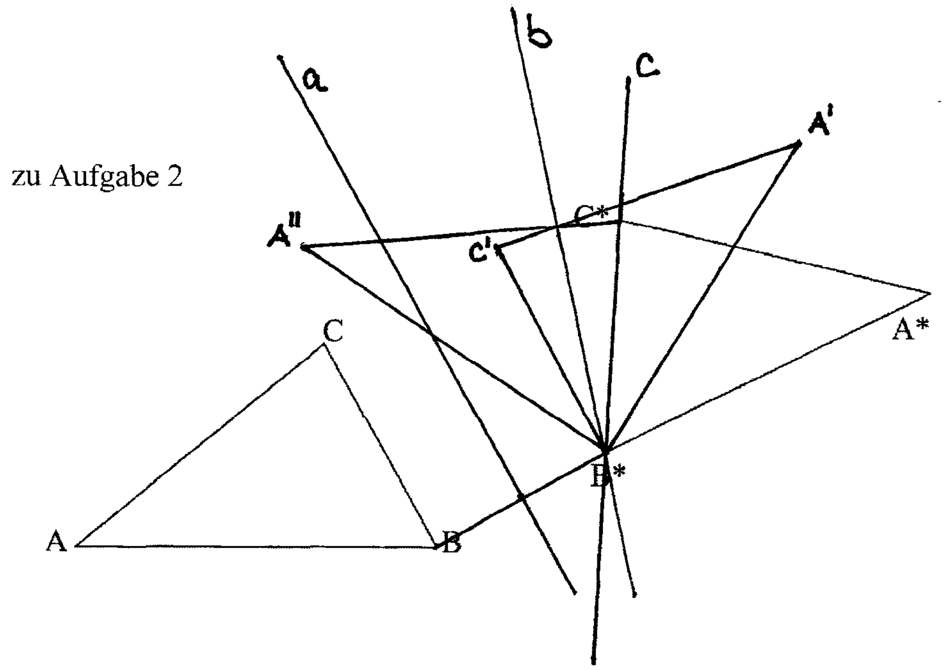
Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07
8. Übung, Lösungsskizzen

1.



1. Spiegelung an a Mittelsenkrechte von B und B^*
$A \to A'$, $B \to B^*$, $C \to C'$
2. Spiegelung an b Mittelsenkrechte von C' und C^*
wegen $|C'B^*| = |C^*B^*|$ liegt B^* auf b
$A' \to A''$, $B^* \to B^*$, $C' \to C^*$
3. Spiegelung an c Gerade B^*C^*
$A'' \to A^*$ da $\Delta A''B^*C^* \cong \Delta A^*B^*C^*$
$B^* \to B^*$, $C^* \to C^*$

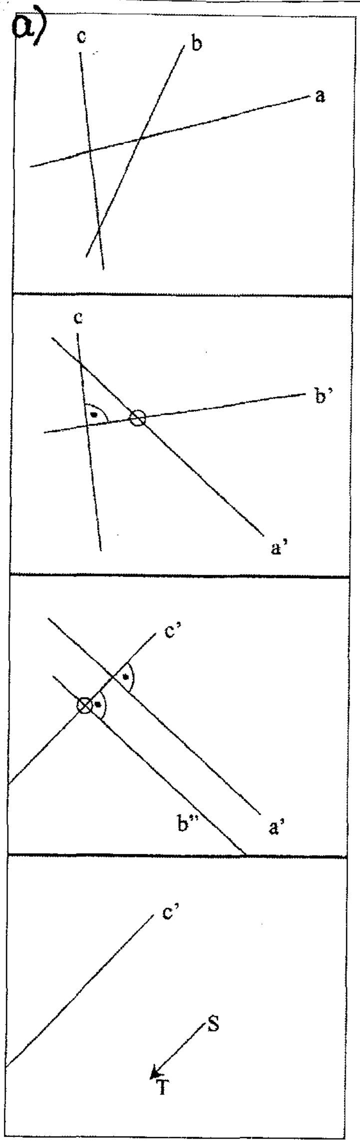
Es gibt insgesamt unendlich viele Lösungen. Die erste Spiegelung kann man vollkommen frei wählen. Die restlichen beiden Spiegelungen müssen dann als Verknüpfung genau eine Drehung ergeben. Dafür kann man aber auch die Achsen auf unendlich viele Arten wählen (siehe Aufg 1).

HAUSÜBUNGEN

2. b) Für feste Geraden a, b, c ist m fest, unabhängig von P. Eine Bewegung von P verändert also nicht m. *

3.

a)



Die drei Spiegelungen an den Achsen a, b, c werden verknüpft: $S_c \circ S_b \circ S_a$

Die Achsen a und b werden um ihren Schnittpunkt bei festem Winkel verdreht, so dass $b' \perp c$. Nach dem Satz über zwei Spiegelungen gilt $S_b \circ S_a = S_{b'} \circ S_{a'}$

Nun werden b' und c verdreht, so dass $c' \perp a'$. Damit sind $b'' \parallel a'$

Es gilt $S_c \circ S_{b'} = S_{c'} \circ S_{b''}$

Die Spiegelungen an a' und b'' können durch eine Verschiebung ersetzt werden. Der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{ST}$ ist parallel zu c', da $ST \perp a'$ (und b'') und $a' \perp c'$.

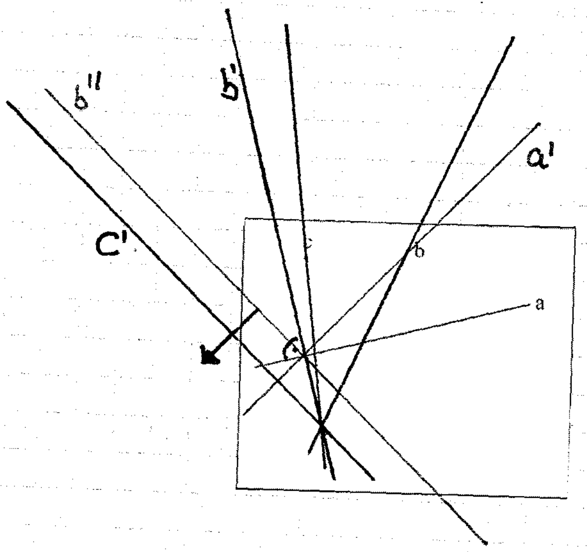
Insgesamt gilt: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_c \circ S_{b'} \circ S_{a'} = S_{c'} \circ S_{b''} \circ S_{a'} = S_{c'} \circ V_{\overrightarrow{ST}}$

Begründung zu 2b)

Die Verknüpfung $S_c \circ S_b \circ S_a$ ist nach dem Dreispiegelungssatz eine Spiegelung. Die Achse ist m. Also

$S_c \circ S_b \circ S_a = S_m$ Bleiben a, b, c unverändert, dann auch m.

3 b)



1. $S_c \circ S_b \circ S_a$ $\quad \widehat{b,c}$ auf b', c'

mit $b' \perp a$

$= S_{c'} \circ S_{b'} \circ S_a$

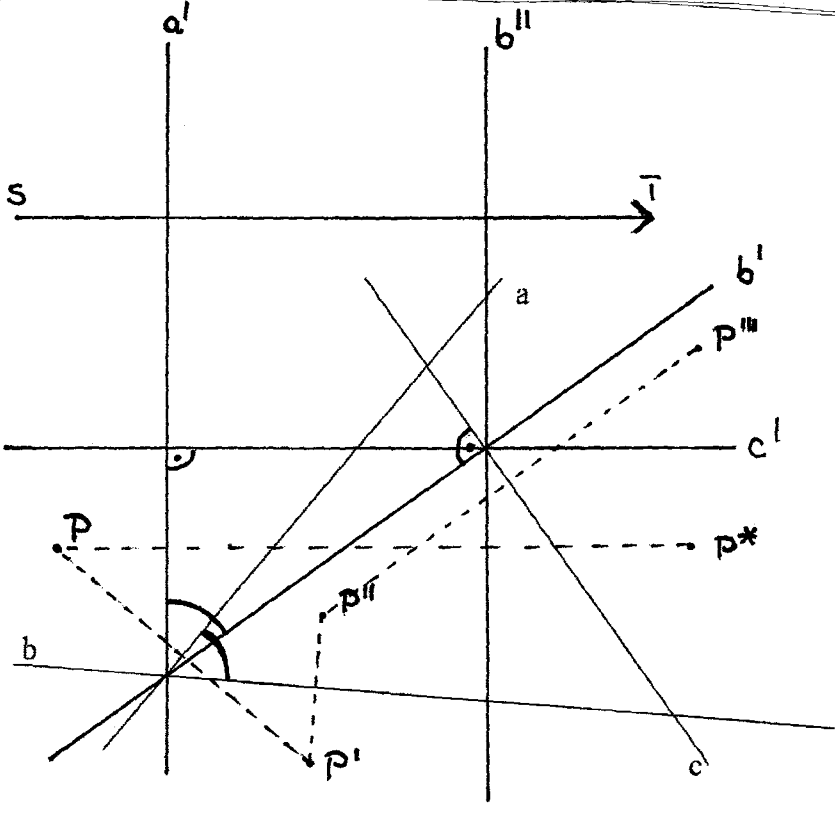
$\widehat{b', a}$ auf b'', a'

mit $b'' \parallel c'$

$= S_{c'} \circ S_{b''} \circ S_{a'}$

Die Spiegelungen an b'' und c' werden zu einer Verschiebung zusammengefasst Es sieht so aus, als ob a' in diesem Fall mit c' aus dem Bild in a. übereinstimmt und ebenso die beiden Verschiebungsvektoren.

c)



$S_a(P) = P'$

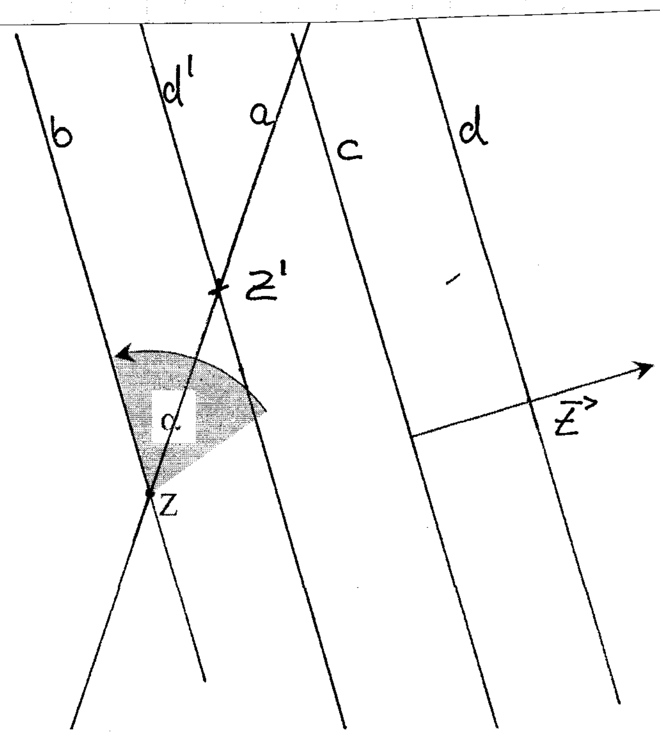
$S_b(P') = P''$

$S_c(P'') = P'''$

$V_{\overrightarrow{ST}}(P) = P^*$

$S_{c'}(P^*) = P'''$

4.



Die Drehung löst man auf in zwei Spiegelungen an a, b. Dabei ist günstigerweise $b \perp \vec{t}$. Dann muss $\sphericalangle a,b = \frac{1}{2}\alpha$ sein. Dann verschiebt man c, d äquidistant, so dass c mit b übereinstimmt. d kommt nach d'.

$$V_{\vec{t}} \circ D_{Z,\alpha} = (S_d \circ S_c) \circ (S_b \circ S_a)$$

$$= S_{d'} \circ \underbrace{S_b \circ S_b}_{id} \circ S_a$$

$$= S_{d'} \circ S_a$$

Z' ist dann der Schnittpunkt von a und d'. Da $d' \parallel b$ gilt $\sphericalangle a,b = \sphericalangle a,d' = \frac{1}{2}\alpha$. Folglich ist der Drehwinkel der Drehung um Z' ebenfalls α.

<u>Knappe, zielgerichtete Konstruktion</u>

~~1.~~ Gegeben sind Z, α, $\vec{t}$

1. Zeichne durch Z eine Senkrechte b zu $\vec{t}$
2. Zeichne durch Z eine Gerade a mit $\sphericalangle a,b = \frac{1}{2}\alpha$ (Richtung beachten)
3. Zeichne zu b eine Parallele d' im Abstand $|\vec{t}| : 2$ (Richtung beachten)
4. Der Schnitt von a mit d' ist Z'

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

5. Verdrehter Tetraeder. Beschriften Sie die übrigen Ecken.