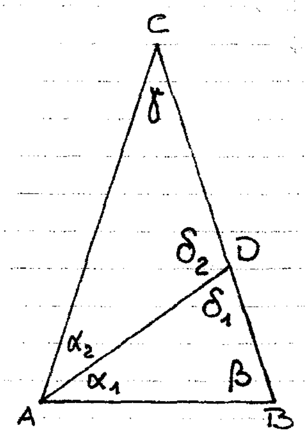
Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07

5. Übung, Lösungsskizzen

1. gleichschenkl. Δ Basiswinkelsatz



$\Delta ABC \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \beta$ ①

$\Delta ADC \Rightarrow \alpha_2 = \gamma$ ②

$\Delta ABD \Rightarrow \beta = \delta_1$ ③

~~Winkl~~ Dreieck Winkelsummensatz

$\Delta ABC \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma = 180^\circ$ ④

$\Delta ADC \Rightarrow \alpha_2 + \delta_2 + \gamma = 180^\circ$ ⑤

$\Delta ABD \Rightarrow \alpha_1 + \beta + \delta_1 = 180^\circ$ ⑥

Damit können wir alle Winkel als Funktion eines Winkels darstellen. Wir wählen β:

③ $\delta_1 = \beta$ ⑥ $\alpha_1 = 180^\circ - 2\beta$ ① $\alpha_2 = \beta - \alpha_1 = 3\beta - 180^\circ$

② $\gamma = \alpha_2 = 3\beta - 180^\circ$ ⑤ $\delta_2 = 180^\circ - 2\gamma = 3 \cdot 180^\circ - 6\beta$

Gleichung ④ wurde noch nicht benutzt, also einsetzen in ④

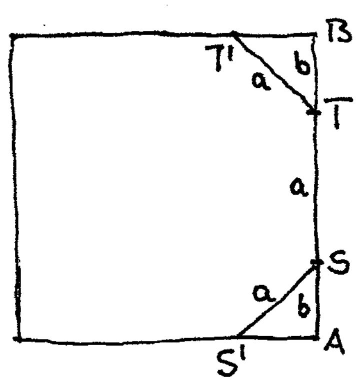
$$180^\circ - 2\beta + 3\beta - 180^\circ + \beta + 3\beta - 180^\circ = 180^\circ$$

$$5\beta - 180^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Dann sind: $\delta_1 = 72^\circ$ $\alpha_1 = 36^\circ$ $\alpha_2 = 36^\circ$ $\gamma = 36^\circ$ $\delta_2 = 108^\circ$

2.



Bezeichnungen

$|TB| = |SA| = |T'B| = |S'A| = b$

$|ST| = a$ $|AB| = 1$

Damit ein reguläres Achteck entsteht, muss gelten: $|SS'| = |TT'| = a$

Pythagoras: $2b^2 = a^2$ ①

Kante des Quadrats: $a + 2b = 1$

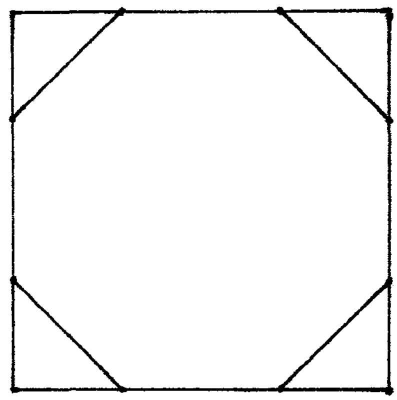
$\Rightarrow 2b = 1 - a \Rightarrow 4b^2 = (1-a)^2$ mit ① gilt

$4b^2 = \underline{2a^2} = (1-a)^2 = \underline{1 - 2a + a^2}$

$a^2 + 2a - 1 = 0 \qquad a = -1 \pm \sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2} - 1$

Für das geometr. Problem ist $a = \sqrt{2} - 1$ die einzige Lös.

$\Rightarrow b = (1-a) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$



Bei einer Kantenlänge von 5cm gilt

$a \approx 2{,}07$ cm $\qquad b \approx 1{,}46$ cm

Hausübung

3. siehe Extrablatt

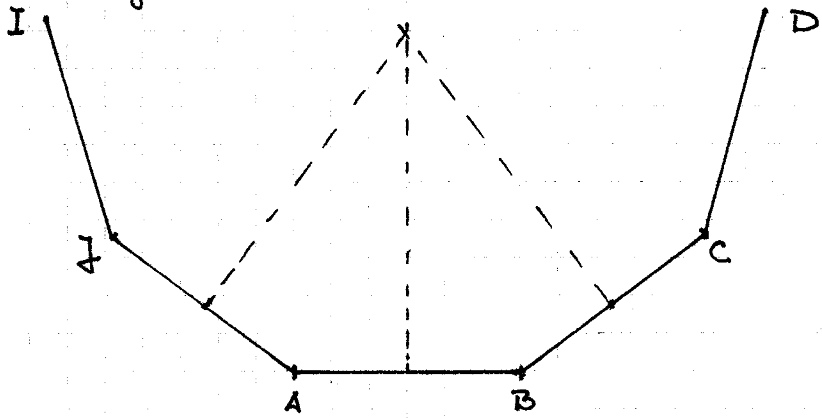
4. a)
1. Fünfeck (3) → Winkel mit $108°$
2. Viereck (2) → $90°$
   halbieren (5) → $45°$
3. Dreieck (1) → $60°$
4. $60° + 45° = 105°$ (6)
5. $108° - 105° = 3°$ (7)

weiterer Lösungsweg

1. Fünfeck (3) → Winkel $72°$ (im Zentrum)
2. Dreieck (1) → $60°$
3. $72° - 60° = 12°$ (7)
4. $12° : 2 = 6°$ (5) $\quad 6° : 2 = 3°$ (5)

4b Im Zehneck ist der Winkel an einer Ecke $144° = 2 \cdot 72°$. Dieser Winkel ist über ein Fünfeck konstruierbar.

Konstruktion: Man zeichnet die gegebene Seite und trägt an beiden Seiten 144° an.

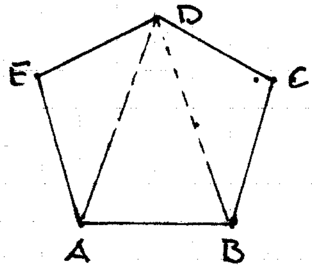


Mit dem Zirkel überträgt man die Kantenlänge und erhält die Punkte C und J.

Über die Mittelsenkrechten erhält man den Mittelpunkt des Umkreises. Nun muss man nur noch mit dem Zirkel die Kantenlänge entlang des Umkreises abtragen und erhält so die übrigen Punkte.

<u>alternativer</u> Lösungsweg.

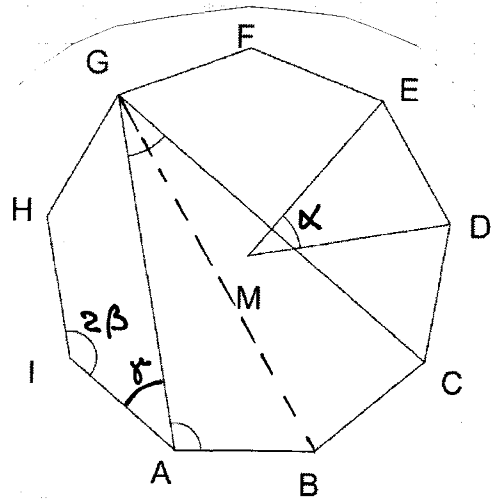
Über der Ausgangskante $\overline{AB}$ konstruiert man ein reguläres 5-Eck ABCDE.



D ist der Mittelpunkt des Umkreises des gesuchten 10-Ecks

Begründung: Peripheriewinkels.

5.



$\alpha = \frac{360°}{9} = \underline{\underline{40°}}$

$2\beta = 180° - \alpha = \underline{\underline{140°}}$

Der Winkel $\sphericalangle AGB$ ist Peripheriewinkel zum Mittelpunktswinkel $\alpha = 40°$

Also $|\sphericalangle AGB| = 20°$

$|\sphericalangle AGC| = \underline{\underline{40°}}$

Im Viereck AGHI gilt

$2\gamma + 2\cdot 2\beta = 360° \Rightarrow 2\gamma = 360° - 2\cdot 140° = 80°$

$\gamma = 40°$

Also ist $|\sphericalangle BAG| = 2\beta - \gamma = 140° - 40° = \underline{\underline{100°}}$

6 a) $d = 1$ also $a - \frac{1}{a} = 1 \;|\cdot a \Rightarrow a^2 - 1 = a \;|-a$

$a^2 - a - 1 = 0$ Lösungsformel: $a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

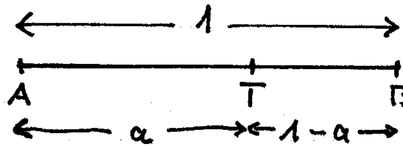
$a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ Die Bedingung $a > 1$ wird nur von $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ erfüllt

b) $d = 3$, also $a - \frac{1}{a} = 3 \;|\cdot a \Rightarrow a^2 - 1 = 3a \;|-3a$

$a^2 - 3a - 1 = 0$ Lösungsformel: $a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1}$

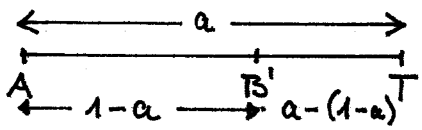
$a = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$ positive Lösung: $a_3 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$

7. <u>Vorauss.:</u>



Setzt man die Gesamtstrecke 1 und den Major $|AT| = a$, so lautet die Voraussetzung $\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$

<u>Behauptung:</u>



B' ist Goldener Teilungspunkt zu $\overline{AT}$. D.h. $\frac{1-a}{a} = \frac{a-(1-a)}{1-a}$

<u>Beweis:</u>

Vorauss.: $\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$

$\overset{a \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad a^2 = 1-a$

So ist der Beweis zu lesen

Beh.: $\frac{1-a}{a} = \frac{a-(1-a)}{1-a}$

$$\overset{a \neq 0,\, a \neq 1}{\Longleftrightarrow} \quad (1-a)^2 = a(2a-1)$$

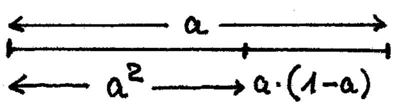
$$\Longleftrightarrow \quad 1-2a+a^2 = 2a^2-a$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-2a = a^2-a$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1-a = a^2$$

<u>alternative</u> Herleitung

Die obere Figur wird mit a gestaucht



Die Voraussetzung kann äquivalent umgeformt werden in $a^2 = 1-a$

$= 1-a$

$$a\cdot(1-a) = a - a^2 = a-(1-a)$$

Damit erhält man die Längen in der Behauptung räumliches Vorstellungsvermögen

8. a) geht : A – F , B – D , C – E

b) geht nicht : A auf F

c) geht nicht : A auf E

d) geht : A – E , B – D , C – F

e) geht : B – E , A – D , C – F

3.