Reimund Albers, Geometrie erleben, SoSe 07

3. Übung, Lösungsskizzen

1. „roter Faden": Über Kongruenzsätze beweist man
$|EF| = |FG|$, $|EF| = |GH|$, $|EF| = |HE|$.
Dann muss man noch nachweisen, dass die vier Innenwinkel $\measuredangle HEF$, $\measuredangle EFG$, $\measuredangle FGH$ und $\measuredangle GHE$ $90°$ groß sind (Genau genommen reichen 5 der 8 Größen)

Beweis von $\triangle EBF \cong \triangle FCG$ ($|EF| = |FG|$ über)

$|BF| = |CG|$ nach Vorauss. / Konstruktion

$|EB| = |FC|$ die „Reststrecken" sind auch gleich lang

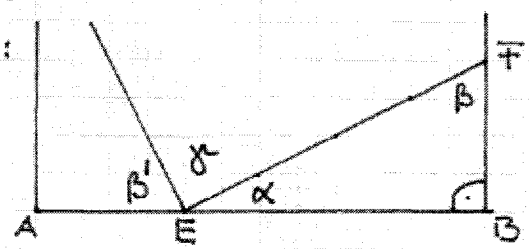
$|\measuredangle EBF| = |\measuredangle FCG| = 90°$, da Winkel des Quadrats

$\Rightarrow \triangle EBF \cong \triangle FCG$ nach SWS

$\Rightarrow |EF| = |FG|$ q.e.d.

Analog zeigt man die Gleichheit mit den anderen Seiten

Winkel:



$|\beta'| = |\beta|$, da entspr. Winkel in kongruenten Dreiecken

$|\alpha| + |\beta| + 90° = 180°$ Winkelsumme im $\triangle EBF$

$\Rightarrow |\alpha| + |\beta'| + \boxed{90°} = 180°$ $|\beta| = |\beta'|$ eingesetzt

$|\alpha| + |\beta'| + \boxed{|\gamma|} = 180°$ da AB gerade Linie

↑ Vergleich liefert $|\gamma| = 90°$ q.e.d.

Analog zeigt man das für die anderen Winkel.

2. a) spitzer Winkel: $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$

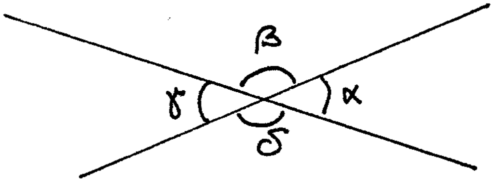
rechter Winkel: $\alpha = 90^\circ$

stumpfer Winkel: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

gestreckter Winkel: $\alpha = 180^\circ$

überstumpfer Winkel: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

Vollwinkel: $\alpha = 360^\circ$



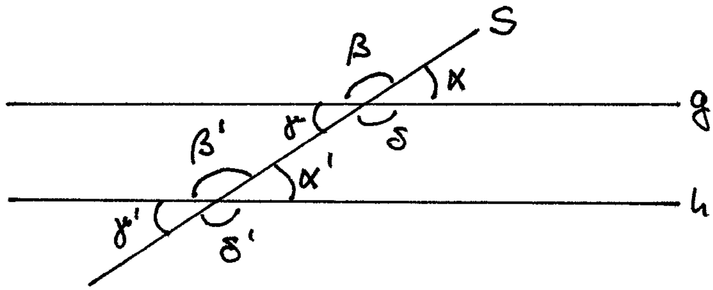
Nebenwinkel haben eine Gerade als gemeinsamen Schenkel.

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°

z.B. Abb. oben: $\alpha + \beta = 180^\circ$ $\beta + \gamma = 180^\circ$

Scheitelwinkel haben zwei Geraden als gemeinsame Schenkel. Abb oben: $\alpha = \gamma$ $\beta = \gamma$

Scheitelwinkel sind gleich groß.



Stufenwinkel i. d. Abb. oben: „Winkel" und „Winkel'"

Wechselwinkel: γ und α' „Zett-Winkel"

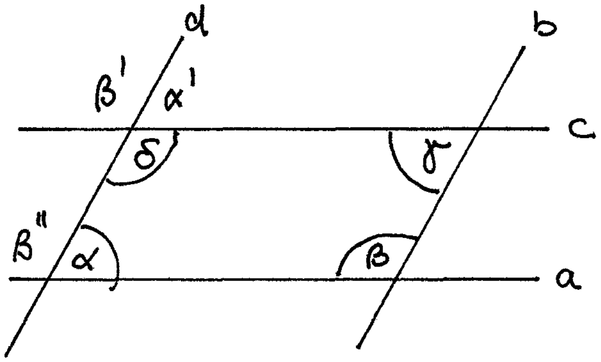
δ und β'

Für Geraden g, h, s in obiger Lage gilt:

Stufenwinkel sind gleich groß $\Longleftrightarrow$ g ∥ h

Wechselwinkel " " "

2 b.



$\alpha = \alpha'$ da Stufenwinkel an Parallelen

$\alpha' = \gamma$ da Wechselwinkel "

also $\alpha = \gamma$ q.e.d.

(2. Weg:)

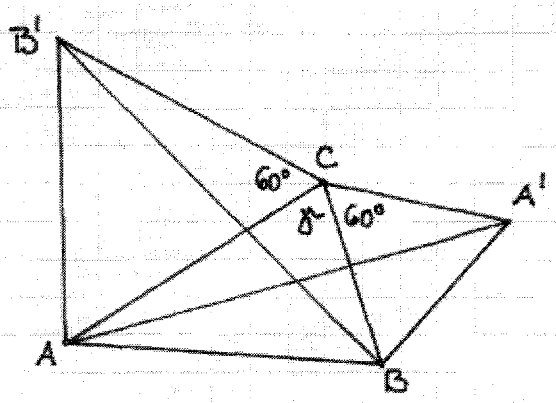
$\beta = \beta''$ da Stufenwinkel an Parallelen b, d

$\beta'' = \beta'$ " " " " a, c

$\beta' = \delta$ da Scheitelwinkel

also $\beta = \delta$ q.e.d.

3.



Man kann sehen, dass wohl $\triangle AA'C \cong \triangle B'BC$ ist

Beweis: $|AC| = |B'C|$, da $\triangle ACB'$ gleichs.

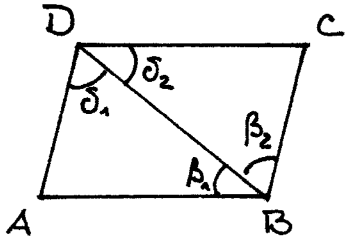
$|CA'| = |CB|$, da $\triangle A'CB$ gleichs.

$|\sphericalangle B'CB| = |\sphericalangle ACA'| = |\gamma| + 60°$

$\Rightarrow \triangle AA'C \cong \triangle B'BC$ nach SWS

$\Rightarrow$ Die entsprechenden Seiten $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ sind dann auch gleich lang.

4.



Ich zeichne die Diagonale BD und vergleiche ΔABD mit ΔBCD

ΔABD		ΔBCD	
$\|BD\|$	=	$\|BD\|$	Tautologie
β_1	=	δ_2	da Wechselwinkel an Parallelen AB, CD
δ_1	=	β_2	" " " AD, BC

$\Delta ABD \cong \Delta BCD$ nach WSW

Also sind auch entsprechende Seiten gleich lang.

D.h. $|AD| = |BC|$ und $|AB| = |DC|$ q.e.d.

5.

Zu zeigen ist: $|DE| = |EF|$ und $|DE| = |FD|$

Wir betrachten die Dreiecke ΔDBE und ΔECF:

$|EB| = |FC|$ nach Konstruktion / Vorauss.

$|DB| = |EC|$ da die „Reststrecken" auch gleich lang sind.

$|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle ECF| = 60°$ Eigenschaft des gleichs. Dreiecks

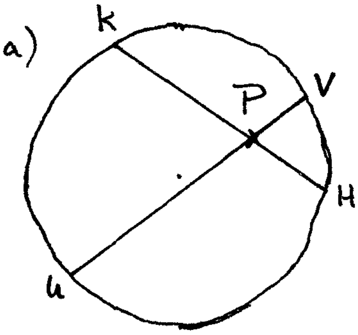
$\Rightarrow \Delta DBE \cong \Delta ECF$ nach SWS

Also sind auch die entsprechenden Seiten $\overline{DE}$ und $\overline{EF}$ gleich lang. q.e.d.

Analog zeigt man $\Delta DBE \cong \Delta FAD$ und damit gilt $|DE| = |FD|$

Also ist ΔDEF gleichseitig q.e.d.

6. a)



<u>dynamisch</u>

Für jede Lage der Sehne durch P gilt $|UP| \cdot |PV| = \text{const}$

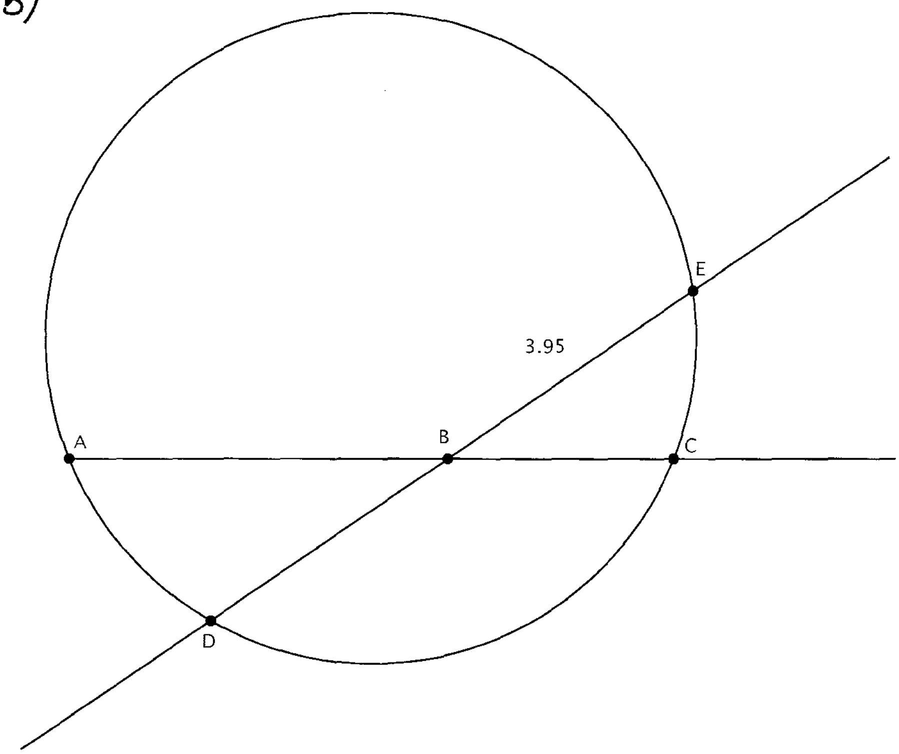
<u>statisch</u>

Für zwei Sehnen durch P gilt: $|UP| \cdot |PV| = |KP| |PH|$

Maßstab in cm: 1:1

Zeichnung mit GeoGebra

b)



Zeichne $|AB| = 5$ cm. Verlängere $\overline{AB}$ über B und zeichne C mit $|BC| = 3$ cm. Zeichne durch B eine beliebige Gerade. Zeichne darauf D mit $|BD| = 3{,}8$ cm. Zeichne den Kreis durch A, D und C. Dieser Kreis schneidet DB in E. $\overline{BE}$ ist die gesuchte Strecke mit $|BE| = 3{,}95$ cm

Rechnung: $5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 3{,}8\,\text{cm} \cdot x$ $\quad x = \frac{15}{3{,}8}\,\text{cm} = 3{,}947\ldots$

7.

a) 1-3 2-4 6-9 7-8 5-10

b) A-D C-H B-E G-F