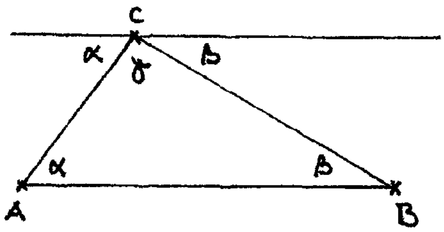
Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2

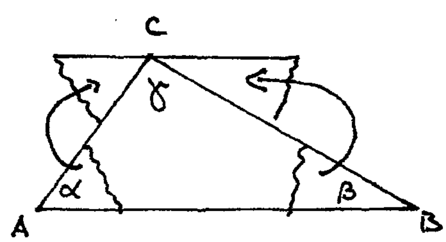
1. Übung, Lösungsskizzen

1) I) der klassische Beweis




Man zeichnet durch C eine Parallele zu AB. Der Beweis erfolgt über den Satz von Stufen/Wechselwinkeln an Parallelen. Der Beweis ist a) exakt, b) seine Anschaulichkeit ist nur indirekt gegeben, da er auf der Anschaulichkeit der Gleichheit der Wechselwinkel beruht. c) Er ist nicht (in dieser Form) auf Vierecke erweiterbar

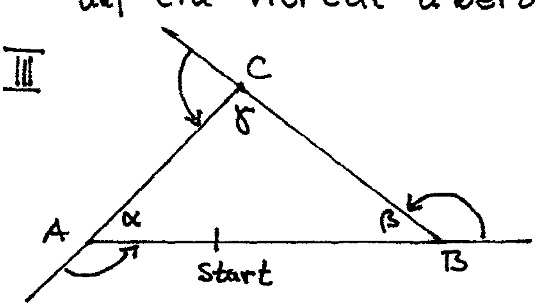
II) Experimentelle Begründung




Ein Dreieck wird aus Papier ausgeschnitten, die Ecken bei A und B abgerissen und bei C angelegt.

Der Beweis ist a) nicht exakt, da hier am Beispiel gearbeitet wird, aber b) sehr anschaulich und c) auf ein Viereck übertragbar ist.

III




Man läuft ein Mal um das Dreieck herum. In den Ecken dreht man sich um die mit Pfeilen markierten Winkel. Wieder am Start hat man sich um 360° gedreht: $(180° - \beta) + (180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 360°$ auflösen ergibt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ b) Anschaulicher Ansatz, aber unanschauliche Umformungen. a) logisch exakt und c) gut auf Vierecke übertragbar.

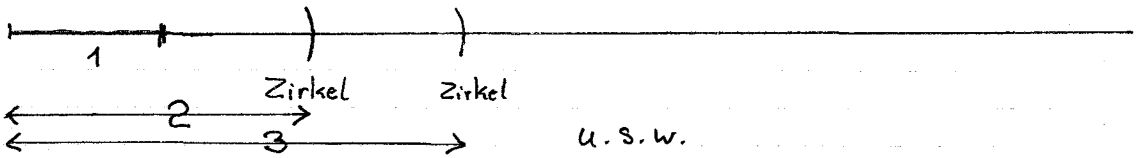
# 2. Pythagoras-Spirale

a) Man erhält $|ZA_i| = \sqrt{i}$ also konkret

$|ZA_2| = \sqrt{2}$ $\quad |ZA_3| = \sqrt{3}$ $\quad |ZA_4| = \sqrt{4} = 2$ $\quad |ZA_5| = \sqrt{5}$

b) Ist $i = n^2$ Quadratzahl, so ist $|ZA_i| = \sqrt{i} = n$

Eine Strecke der Länge $n$, $n \in \mathbb{N}$ kann man aus einer Strecke der Länge 1 natürlich viel einfacher konstruieren

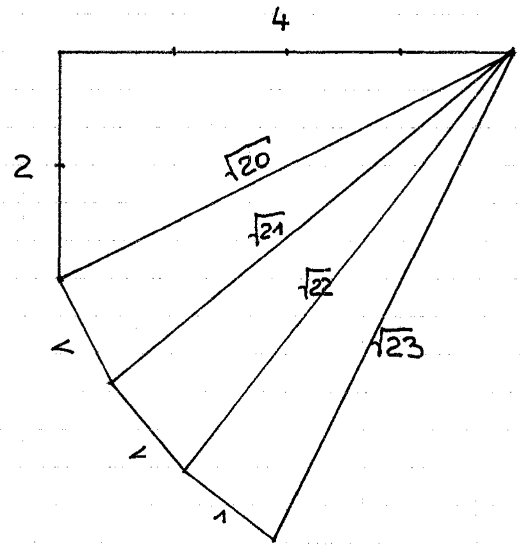



u.s.w.

c) $\sqrt{23}$ $\quad$ Wegen $\quad 23 = 16 + 4 + 1 + 1 + 1$

$$= 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

kann man in der Pythagorasschnecke „abkürzen"




Probe:

$7{,}2\text{ cm} = 4{,}8\text{ LE}$

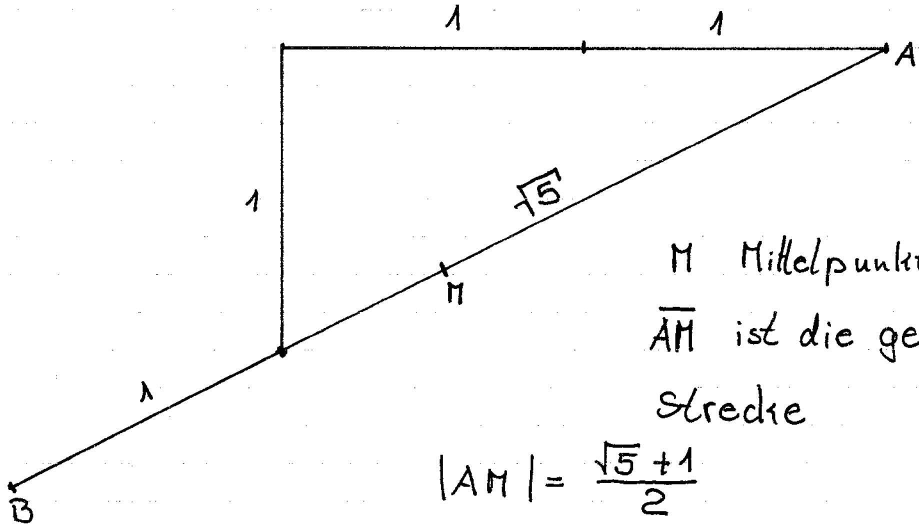
$\sqrt{23} \approx 4{,}796$

Noch geschickter geht es mit $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

Satz: Jede natürliche Zahl ist als Summe von maximal vier Quadratzahlen darstellbar.

# HAUSÜBUNGEN

3.



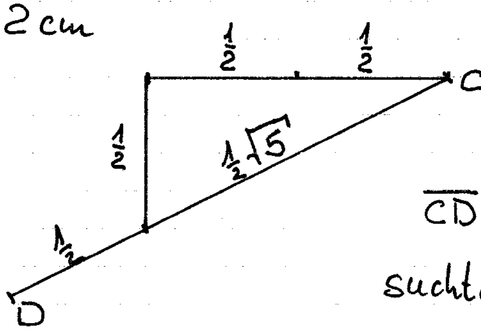

$M$ Mittelpunkt von $\overline{AB}$

$\overline{AM}$ ist die gesuchte Strecke

$$|AM| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Bequemer und platzsparender: Man halbiert erst

1LE = 4 cm $\qquad \frac{1}{2}$LE = 2 cm




$$\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$
$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\overline{CD}$ ist die gesuchte Strecke.

4. a) Das gesamte Rechteck AEBH wird durch die Diagonale AB in zwei gleich große Dreiecke zerlegt. Rechts unten werden davon

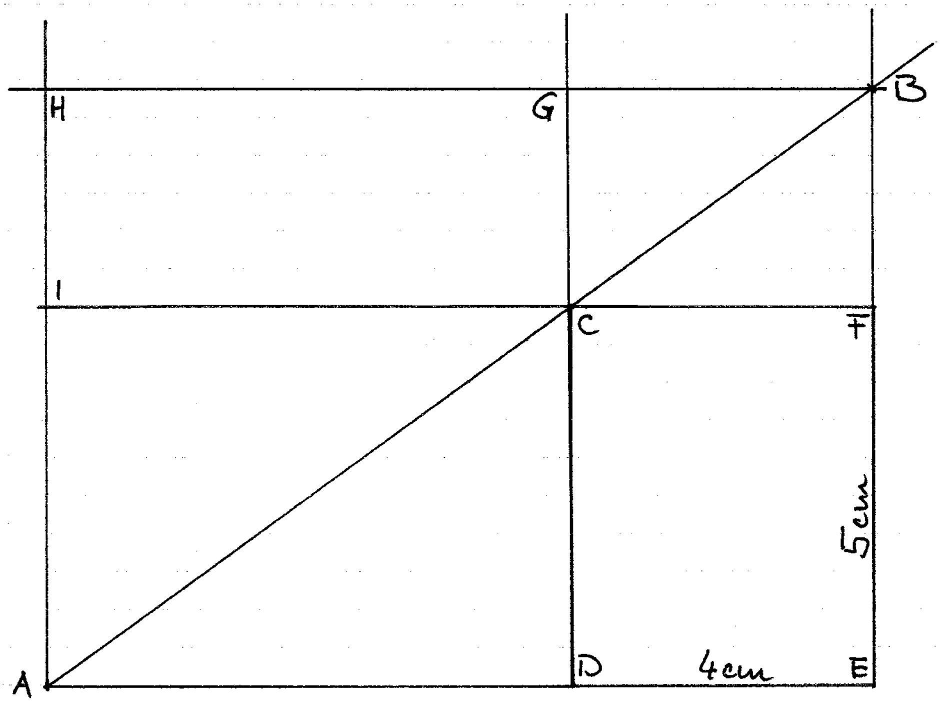
$\Delta ADC$ und $\Delta CFB$ weggenommen $\rightarrow$ DEFC

Links oben werden davon

$\Delta ACI$ und $\Delta CBG$ weggenommen $\rightarrow$ ICGH

Da die weggenommenen Dreiecke paarweise gleich sind, ~~ist~~ sind es auch ~~das~~ die verbleibenden Rechtecke.

b)




1. Ich zeichne DEFC mit $|DE| = 4$ cm und $|EF| = 5$ cm
2. Verlängere $\overline{DE}$ nach A mit $|AD| = 7$ cm
3. Verlängere $\overline{EF}$ über F und $\overline{AC}$ über C bis beide sich schneiden. → B
4. Parallelen zu AE durch C und B und Parallelen zu EB durch A und C vervollständigen die Figur. → Punkte G, H, I

5. a) 8 Dreiecke, für jede Würfelecke eins
   b) 6 Quadrate, für jede Quadratseite eins
   c) 8 Dreiecke und 6 Quadrate haben $8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 48$ Flächenkanten. Je zwei Flächenkanten bilden eine Körperkante $48 : 2 = \underline{\underline{24}}$ Kanten
   d) Ebenso 48 Flächenecken $48 : 4 = \underline{\underline{12}}$ Körperecken