1. $\triangle MBT \qquad \triangle MCD$

$|\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle BMD|$ Tautologie (0,5)

$|MT| = |MC|$ da Radius des Halbkr. (1)

$|\sphericalangle MTB| = |\sphericalangle DCM| = 90^\circ$

laut Konstr.

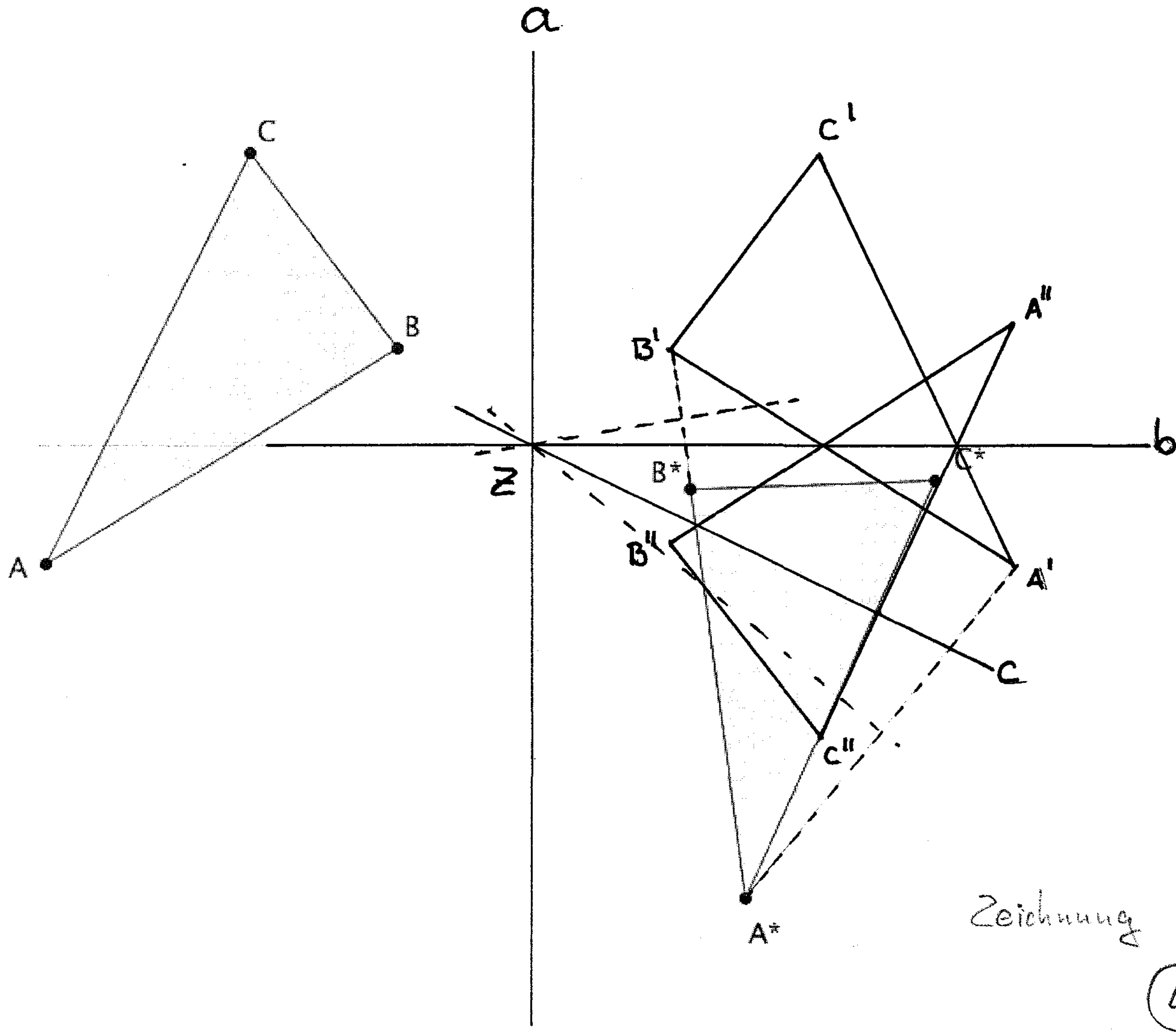
da $\overline{MT}$ Radius und BT Tangente (1,5)

$\triangle MBT \cong \triangle MCD$ nach WSW (1)

Also sind auch die entspr. Seiten $\overline{MB}$ und $\overline{MD}$ gleich lang (1)

$\boxed{5}$

a)



4

b) Die gegebene Gerade ist die Achse a

$$S_a(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$$

Dann sind $\Delta A'B'C'$ und $\Delta A^*B^*C^*$ gleichsinnig kongruent
Also gibt es eine Drehung, die $\Delta A'B'C'$ abbildet auf $\Delta A^*B^*C^*$. Das Drehzentrum ist der Schnitt der Mittelsenkrechten von $\overline{A'A^*}$ und $\overline{B'B^*}$.
Dann ist die Achse b die Senkrechte durch Z senkrecht zu a, also $a \perp b$

$$S_b(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$$

Die Achse c ist die Mittelsenkr. von $\overline{A''A^*}$

3

2c) Nein, es gibt weitere Lösungen

- Man darf a und b vertauschen
- Man kann auch $c \perp a$ durch Z wählen und b dann passend wählen

2

$\boxed{9}$

3.

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) \quad 1$$

$$= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \quad 1$$

$$= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \quad 1$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad 1$$

$\alpha = 30^\circ$

$\cos 3\alpha = \cos 90^\circ = 0$

$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{3}{8}\sqrt{3}$

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cdot\frac{3}{8}\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 0$ ✓ 1

$\boxed{5}$

4

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A(n): für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$7 \mid 3^{2n} - 2^n$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang A(1): Die Aussage gilt für $n=1$

denn: $3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7 = 7 \cdot 1$ stimmt 1

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung A(n) : $7 \mid 3^{2n} - 2^n \iff 3^{2n} - 2^n = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ 1

Induktionsbehauptung A(n +1) :
$7 \mid 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ 1

Induktionsbeweis:

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^2 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^n$$ 1

$$= 3^2 \cdot (3^{2n} - 2^n) + 3^2 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n$$

Ind. V. 1

$$= 3^2 \cdot 7k + 2^n (9 - 2)$$

$$= 7 \underbrace{(9k + 2^n)}_{\in \mathbb{Z}}$$

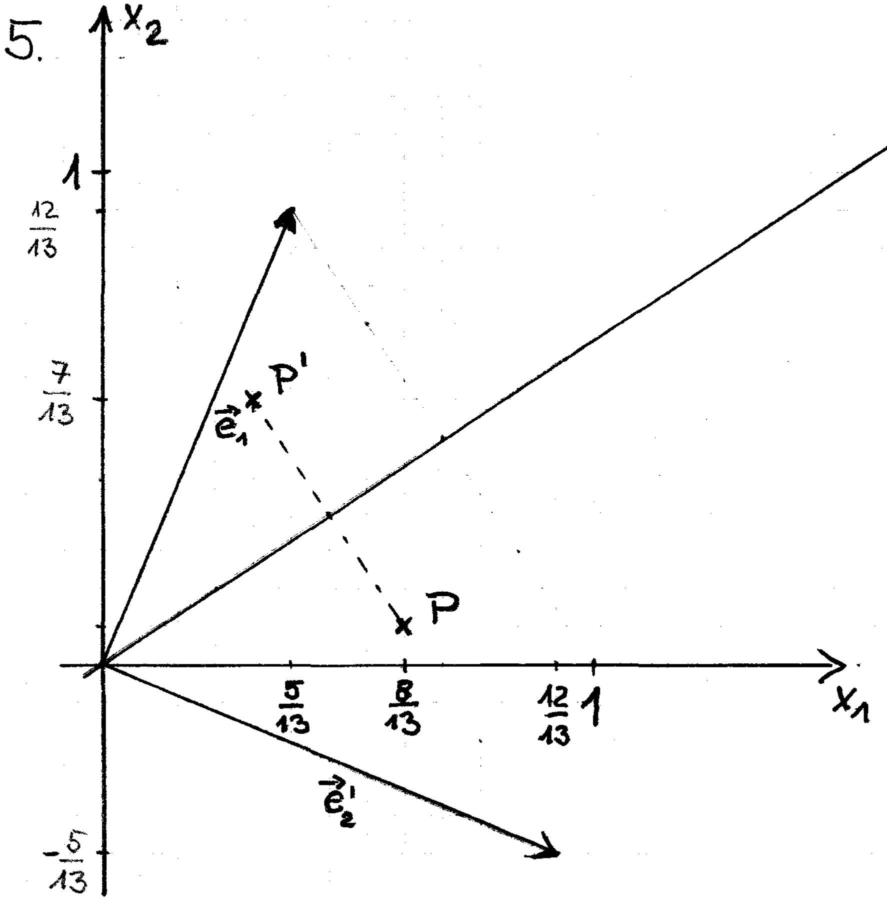
Der Faktor 7 lässt sich ganzzahlig ausklammern, also gilt $7 \mid 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ 1

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf n +1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

6

5.



Zeichnung (3)
mit P (1)

Die Abbildungsgleichung lautet

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \vec{x}$$

(1)

b) Zeichnung: $P'\left(\frac{4}{13} ; \frac{7}{13}\right)$ s.o.

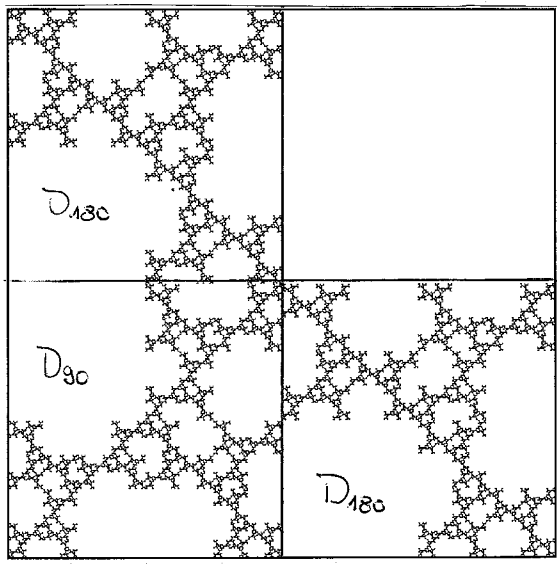
rechnerisch

$$\vec{P}\,' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ \frac{1}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13^2}\,(40 + 12) \\ \frac{1}{13^2}\,(96 - 5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

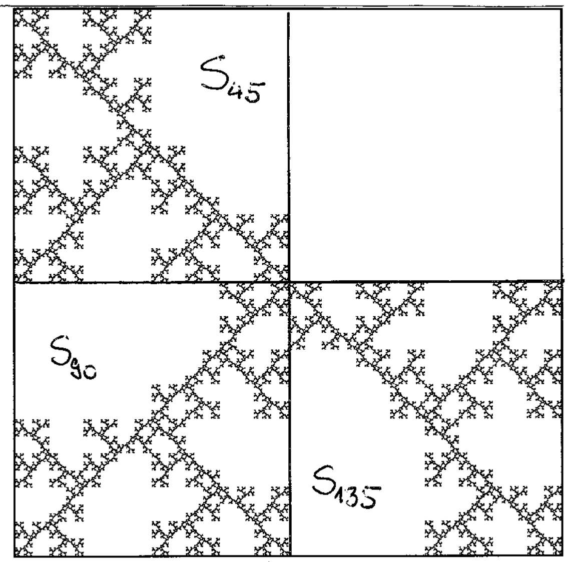
✓ (2)

$\boxed{7}$

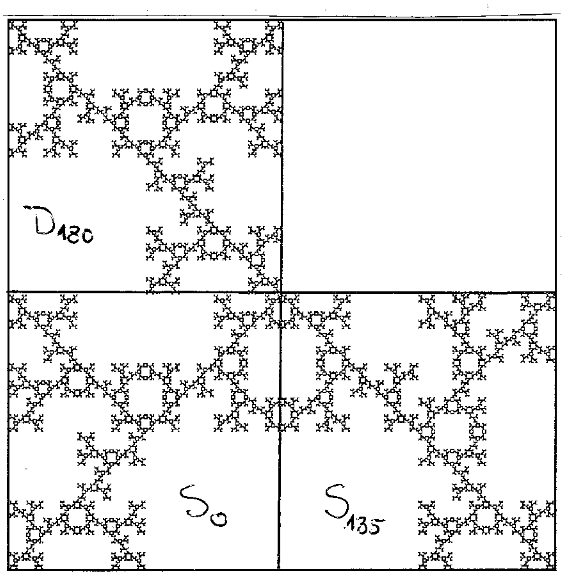
6



a



b



c

je 1,5

d) 8 Abbildungen → Zählen im Achtersystem

$D_0 \to 0 \quad D_{90} \to 1 \quad D_{180} \to 2 \quad \ldots \quad S_{135} \to 7$

Dann ist D270 | S0 | S45 die Zahl 345_8

$= 3 \cdot 64 + 4 \cdot 8 + 5 = 229_{10}$

1,5

$\boxed{6}$