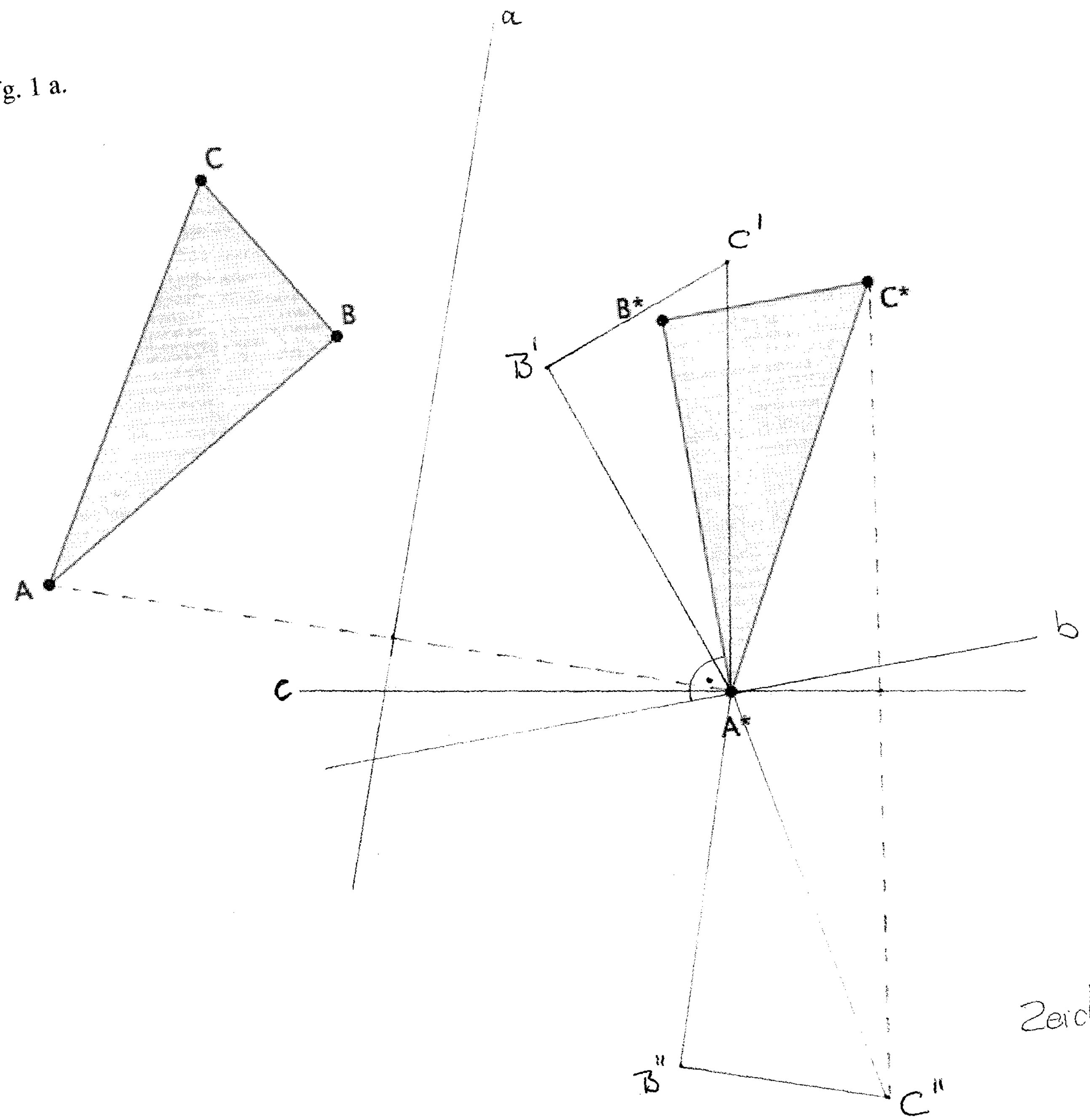
zu Aufg. 1 a.



Zeichnung 4

1. Mittelsenkrechte von AA^* ist a
S_a: $A \to A^*$, $B \to B'$, $C \to C'$

2. Senkrechte zu A^*B^* durch A^* ist b
S_b: $A^* \to A^*$, $B' \to B''$, $C' \to C''$

Beschr. 3

3. Mittelsenkrechte von $C''C^*$ ist c
... $C'' \to C^*$

2 a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 1

Mit den Additionstheoremen erhält man:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ 1

b) Also gelten folgende Gleichungen für α und β:

$\cos(\alpha+\beta) = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta = 180^\circ$ oder $\alpha+\beta = 540^\circ$

$\sin(\alpha+\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ " 1 " 1

Für beide Bedingungen gibt es Winkel $0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$, die diese erfüllen.

c) Die beiden Matrizen sind Drehmatrizen, Drehwinkel α bzw. β.

Die Matrixmultiplikation stellt die Verknüpfung beider Drehungen dar. Es ergibt sich eine Drehung um $\alpha+\beta$.

Die rechte Seite ist eine Drehmatrix für einen Drehwinkel von 180° oder 540°.

Folglich ergeben sich die beiden Gleichungen

$\alpha+\beta = 180^\circ$ oder $\alpha+\beta = 540^\circ$ 3

3a) i) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x}$ (1)

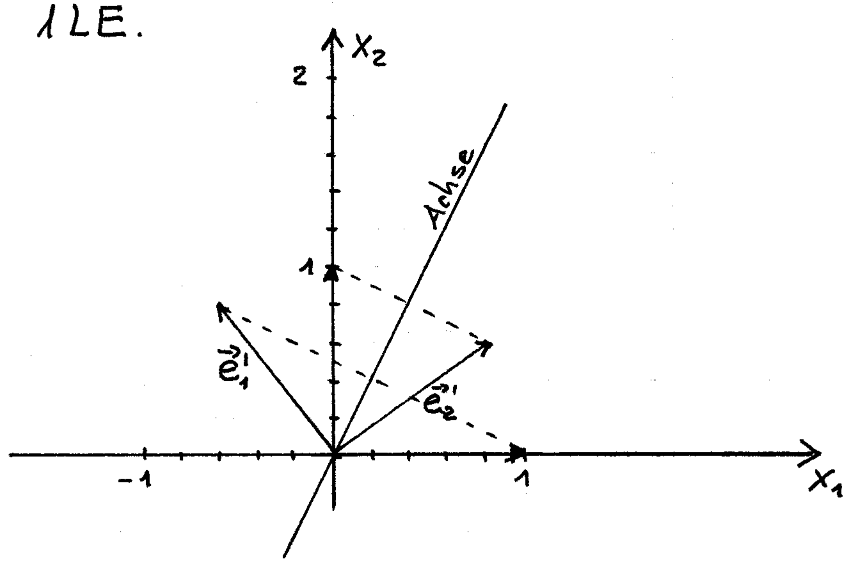
ii) $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1)

iii) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ (1)

iv) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix} \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$ (1)

b) Nach dem „Satz über das Aufstellen einer Abbildungsmatrix" gilt: $\vec{e}_1 \to \vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 \to \vec{e}_2{}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Um diese Werte genau einzeichnen zu können, wähle ich für 0,2 ein Kästchen, als 5 Kästchen für 1 LE.

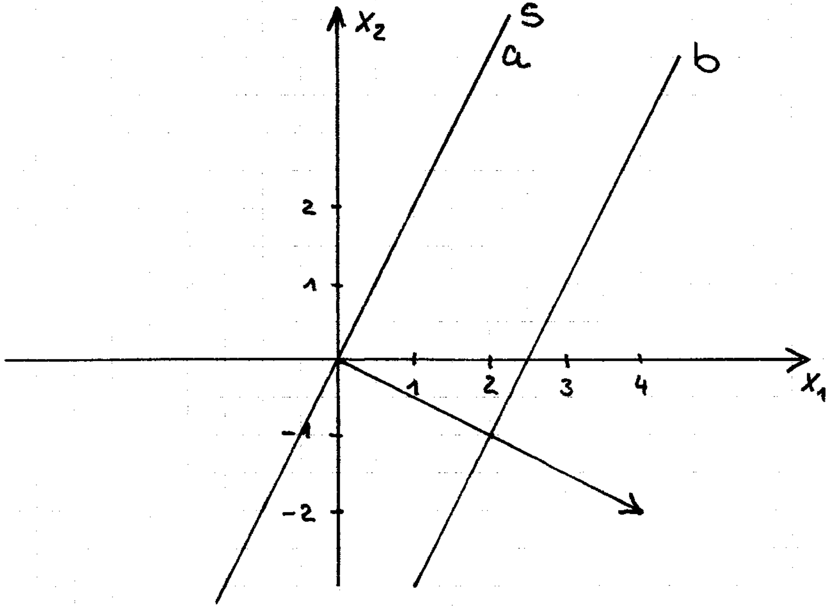


Die Paare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ +0{,}6 \end{pmatrix}$

liefern dann als Spiegelachse die eingezeichnete Gerade. Gleichung $x_2 = 2x_1$

(4)

3c)



Die Verschiebung mit $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ kann aufgelöst werden in die Verknüpfung der Spiegelungen an a (= s) und b.

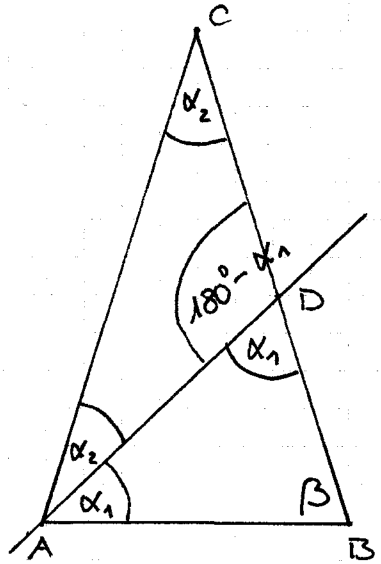
2

d) Erst Spiegelung an s, dann Verschiebung:

$$V \circ S_s = S_b \circ \underbrace{S_a \circ S_s}_{id,\ da\ a = s} = S_b$$

Man erhält eine Achsenspiegelung an b. 2

4.



α_1 zweimal, da ΔABD gleichsch.

α_2 zweimal, da ΔADC gleichsch.

ΔABC gleichsch. $\Rightarrow$

1: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$

Winkelsumme ΔABC:

2: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \alpha_2 = 180°$

oder 3: $2\beta + \alpha_2 = 180°$

Winkelsumme im ΔADC $\quad 2\alpha_2 + 180° - \alpha_1 = 180°$

$\Rightarrow 2\alpha_2 = \alpha_1$

einsetzen in 2: $\quad 2\alpha_2 + \alpha_2 + \beta + \alpha_2 = 180°$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 4\alpha_2 + \beta = 180° & \cdot 2 \\
3: & \alpha_2 + 2\beta = 180° & - \\
\hline
 & 7\alpha_2 = 180° &
\end{array}
$$

$\alpha_2 = \frac{180°}{7} \approx 25,7°$

$\alpha_1 = 2\alpha_2 = \frac{360°}{7} \approx 51,4°$

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{540°}{7} \approx 77,1°$

6

Aufg. 5

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A(n):

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

Induktionsanfang A(1): Die Aussage gilt für $n = 1$

denn: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$ $\quad 1 - \frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓ 1

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung A(n): $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$

Induktionsbehauptung A(n+1): $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ 1

Induktionsbeweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}$$ 1

Ind. Vor.

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$ 1

$$= 1 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$ 2

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf n+1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

6. a) D_{270}

D_{180} S_{135}

b) D_{180}

S_{135} S_{90}

je 0,5

$\boxed{3}$