Sommersemester 2006
Reimund Albers

Geometrie erleben

12. Übung
Verknüpfung von drei Spiegelungen

Präsenzübungen (für 11./12.7.)

1. Gegeben ist die Abbildung mit der Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \vec{x}$.
   a. Bestimmen Sie zu dieser die Spiegelungsachse. Überlegen Sie dazu wenigstens zwei Lösungswege.
2. Gegeben ist die Abbildung mit der Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   a. Weisen Sie nach, dass die Abbildung involutorisch ist.
   b. Machen Sie sich an einer Zeichnung klar, dass der Verschiebungsvektor senkrecht zur Spiegelungsachse verläuft.
   c. Bestimmen Sie zu dieser Abbildung die Spiegelungsachse. Überlegen Sie dazu wenigstens zwei Lösungswege.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 14.7.) **letzte**, abzugebende Übung!

3. Gegeben ist die Spiegelung S_a an der Geraden a mit der Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$,

   die Spiegelung S_b an der Geraden b mit der Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \vec{x}$

   und die Spiegelung S_c an der Geraden c mit der Gleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   a. Zeichnen Sie die Spiegelachsen a, b und c in ein Achsenkreuz (Verwenden Sie für b und c inverse Winkelfunktionen und die Erkenntnisse aus der Präsenzübung).
   b. Spiegeln Sie rein zeichnerisch das Dreieck ABC nacheinander an den Achsen a, b c.
   A(1;0), B(3;1), C(2;2)
   (Ziehen Sie in Erwägung, diese Zeichnung mit Euklid zu machen.)
   Bestimmen Sie aus der Zeichnung die Koordinaten der letzten Bildpunkte.
   c. Berechnen Sie die Abbildungsgleichung der Verkettung $S_c \circ S_b \circ S_a$. Bilden Sie nun mit der erhaltenen Abbildung das Dreieck ABC aus Aufg. b ab. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus b. mit den hier berechneten.
   d. Bestimmen Sie durch eine (neue) Zeichnung die Spiegelungsachse und die Verschiebung für die Schubspiegelung, die sich aus $S_c \circ S_b \circ S_a$ ergibt.

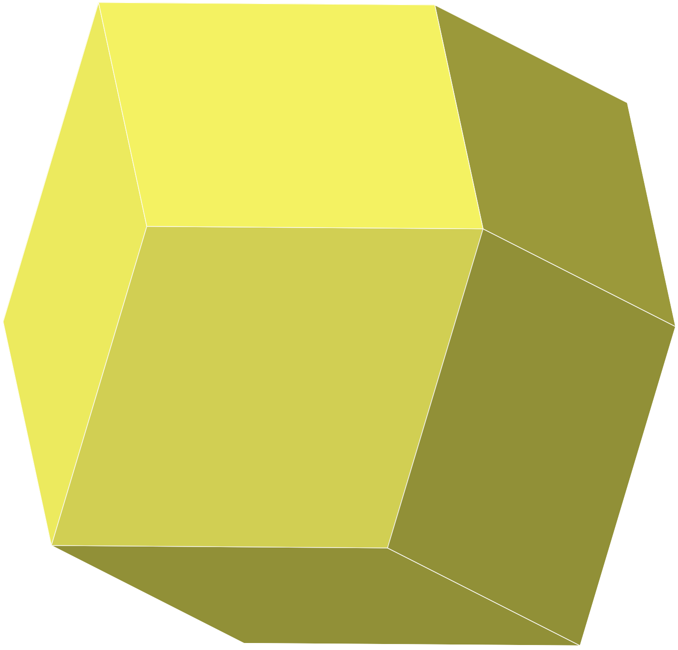
Wiederholung

4. Beweisen Sie die Summenformeln durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren



Das Bild zeigt einen Körper, dessen Seitenflächen kongruente Rauten sind. In einem Punkt stoßen entweder drei stumpfe Winkel oder vier spitze Winkel zusammen.
Wie viele Flächen, Ecken und Kanten hat er?

Extraaufgabe (auf <u>extra</u> Zettel an Herrn Albers)

Zum Abschluss noch ein warnendes Beispiel zum Verwenden der Kongruenzsätze:
Konstruktionsbeschreibung:
Zeichnen Sie ein Dreieck ABC mit $|AB| = 5\text{cm},\ |AC| = 6\text{cm},\ |BC| = 4\text{cm}$.
Zeichnen Sie die Senkrechte h von C auf die Gerade AB.
Spiegeln Sie B an h auf B'. Spiegeln Sie B' an AC auf B''.
Betrachten Sie die Dreiecke ABC und ACB''.

Es gilt $|BC| = |B''C|$ (Warum?)

$|AC| = |AC|$

$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAB''|$ (Warum?)

Die Dreiecke stimmen in zwei Seitenlängen und einer Winkelgröße überein, folglich sollten sie kongruent sein. Sind es aber nicht, denn $|AB| \neq |AB''|$. Wo steckt der Fehler?