10. Übung
Abbildungsgleichungen, Matrizenmultiplikation

Präsenzübungen (für 27./28.6.)

1. In der Vorlesung hatten wir zu den einschlägigen Abbildungen die Matrizen aufgestellt, indem wir die Bilder der beiden Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ bestimmt hatten. Gehen Sie genau so vor für folgende Abbildungen:
   a. Spiegelung an der Geraden $x_2 = x_1$.
   b. Spiegelung an der Geraden $x_2 = -x_1$.
   c. Drehung um den Ursprung um 135°

   Vergleichen Sie jeweils Ihr Ergebnis mit der in der Vorlesung bestimmten allgemeinen Matrix.
   Machen Sie mit zwei Beispielpunkten die Probe zeichnerisch und rechnerisch.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 30.6.)

2. Vorsicht Minuszeichen! Die Abbildungsmatrizen für die Spiegelung und Drehung sind sehr ähnlich und können leicht verwechselt werden.
   Entscheiden Sie bei den nachfolgenden Matrizen, ob es sich um eine Spiegelung oder Drehung handelt.
   Bei einer Spiegelung: Geben Sie den Winkel zwischen x_1-Achse und Gerade an.
   Bei einer Drehung: Geben Sie den Drehwinkel an.
   Hilfreiche Formeln zur Erinnerung: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

   a. $\begin{pmatrix} -\cos 10° & -\sin 10° \\ \sin 10° & -\cos 10° \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -\cos 20° & \sin 20° \\ -\sin 20° & -\cos 20° \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -\cos 60° & -\sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}$

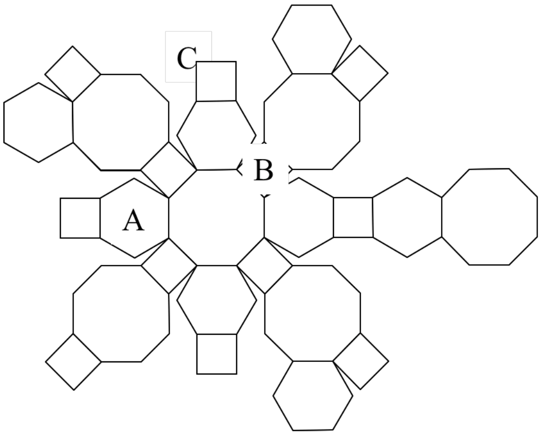
   d. $\begin{pmatrix} \sin 10° & \cos 10° \\ \cos 10° & -\sin 10° \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -\cos 20° & \sin 20° \\ \sin 20° & \cos 20° \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} \sin 10° & \cos 10° \\ -\cos 10° & \sin 10° \end{pmatrix}$

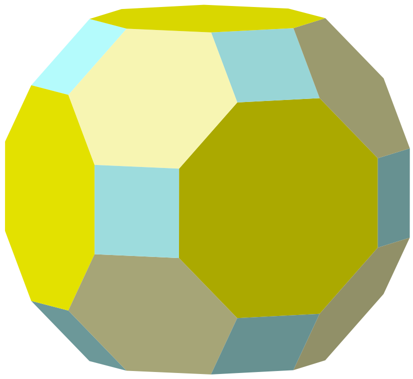
3. Matrizenmultiplikation
   a. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $A \cdot B$ und $B \cdot A$.
   Was ist bemerkenswert?
   b. Zeigen Sie durch Matrizenmultiplikation: Eine Drehung um O mit dem Winkel α und eine anschließende Drehung um O mit dem Winkel β können ersetzt werden durch eine Drehung um O mit dem Winkel $\alpha+\beta$.
   c. Zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ wird die Matrix B gesucht, so dass $A \cdot B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt.
   Berechnen Sie B. Üblicherweise bezeichnet man diese Matrix mit „inverser Matrix" und schreibt kurz A^{-1}. Prüfen Sie, ob auch $B \cdot A = E$ gilt.

4. Gegeben ist die Abbildungsgleichung $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

   a. Begründen Sie , dass die Abbildungsmatrix zu einer Drehung gehört und dass die gesamte Abbildung eine Drehung sein muss.
   b. Berechnen Sie zum Dreieck OAB mit O(0;0) , A(5;0) und B(0;3) die Bildeckpunkte O', A' und B'. Zeichnen Sie Ur- und Bildpunkte in ein Koordinatensystem (1 Einheit 1 cm). Ermitteln Sie aus der Zeichnung das Drehzentrum.
   c. Das Drehzentrum Z ist der (einzige) Fixpunkt einer Drehung. Also erfüllt der Punkt die Gleichung $\vec{z} = A\vec{z} + \vec{d}$. Berechnen Sie mit diesem Ansatz für die oben gegebene, konkrete Abbildung das Drehzentrum. Vergleichen Sie mit Ihrer zeichnerischen Lösung.

5. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen
   Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren





   Bestimmen Sie die Flächen, die den markierten Flächen gegenüber liegen.

Extraaufgabe (auf <u>extra</u> Zettel an Herrn Albers)

Wir haben die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung bestimmt, wobei die Richtung der Geraden durch den Winkel α zur positiven x_1-Achse gegeben war. Nun soll die Gerade wie üblich durch ihre Steigung m gegeben sein, also $x_2 = mx_1$. Bestimmen Sie für die Spiegelung an $x_2 = mx_1$ die Abbildungsmatrix, in der nur die Steigung m vorkommen darf.
Hinweise: Sind m_1 und m_2 die Steigungen von zwei zueinander senkrechten Geraden, so gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$. Eine Gerade durch den Punkt P(p_1; p_2) und der Steigung m hat (im x_1-x_2-Koordinatensystem) die Gleichung $x_2 - p_2 = m(x_1 - p_1)$.