9. Übung
Trigonometrie, Matrizen

Präsenzübungen (für 20./21.6.)

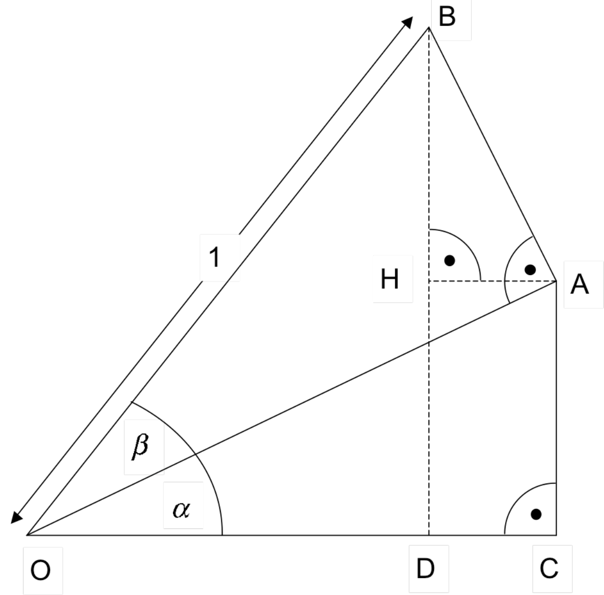
1. Eine Abbildung der Form $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ bildet Punkte wieder auf Punkte ab. Konkret sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0,5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$
   Rechnen Sie die Bildpunkte aus für O(0 ; 0) , A(3 ; -2) und B(-1 ; 1). Berechnen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und bilden Sie ihn ebenfalls ab. Ist der Bildpunkt M' auch der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$?

2. Umgekehrt ist eine Abbildung der Form $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ eindeutig festgelegt, wenn von 3 Punkten die Bildpunkte bekannt sind.
   Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix und den Verschiebungsvektor, wenn O(0;0) abgebildet wird auf O'(3;-1) , A(1;1) auf A'(6;-2) und B(-1;0) auf B'(2;0)

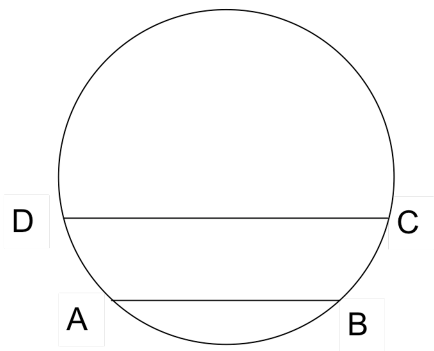
Hausübungen (Abgabe: Fr, 23.6.)

3. Trigonometrie
   a. Setzen Sie in das Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta)$ für den Sinus $\beta = 90° - \alpha$ ein. In welche andere wichtige Formel können Sie das Ergebnis umformen?
   b. Sie kennen eine Formel für den doppelten Winkel des Sinus, $\sin 2\alpha$. Leiten Sie eine Formel für $\sin 3\alpha$ her, in der nur Potenzen von sin 3α und cos 3α vorkommen. Machen Sie für $\alpha = 30°$ die Probe.
   c. Für $0° \le \alpha < 90°$ gilt $\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$ Leiten Sie diese Formel her. Warum ist sie für $\alpha = 90°$ nicht definiert?
   d. Das Additionstheorem für den Tangens lautet $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$. Leiten Sie diese Formel her.

4. Die nebenstehende Zeichnung dient zum Beweis des Additionstheoreme für den Sinus und Kosinus, $\sin(\alpha+\beta)$ $\cos(\alpha+\beta)$ für $0° \le \alpha+\beta \le 90°$. Beweisen Sie damit die beiden Additionstheoreme.
   Hinweise: Die Strecke $\overline{OB}$ ist zu 1 normiert. Also gilt $|DB| = \sin(\alpha+\beta)$ und $|OD| = \cos(\alpha+\beta)$. Weiterhin können Sie die Längen der Strecken im Dreieck OAB wie im „Merkdreieck" bestimmen. Dann sind die Dreiecke OCA und HAB gestauchte „Merkdreiecke". Bestimmen Sie den Winkel HBA.



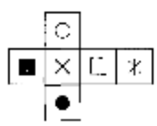
5. Es seien A, B, C und D vier Punkte auf einem Kreis in der dargestellten Lage. Beweisen Sie:
   $|AD| = |BC| \Leftrightarrow AB \parallel CD$
   a. Verwenden Sie einmal die üblichen Winkel- und Kongruenzsätze.
   b. Finden Sie eine geeignete Achsenspiegelung und verwenden Sie, dass Spiegelungen längentreu sind.

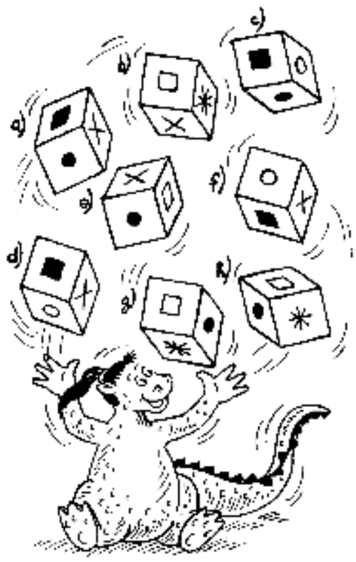


6. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Zahline, die Würfelakrobatin

1 Zahline hat vier Würfel aus dem gleichen Netz gefaltet. Dies ist das Netz.

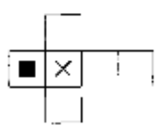




Welche Würfel sind es?

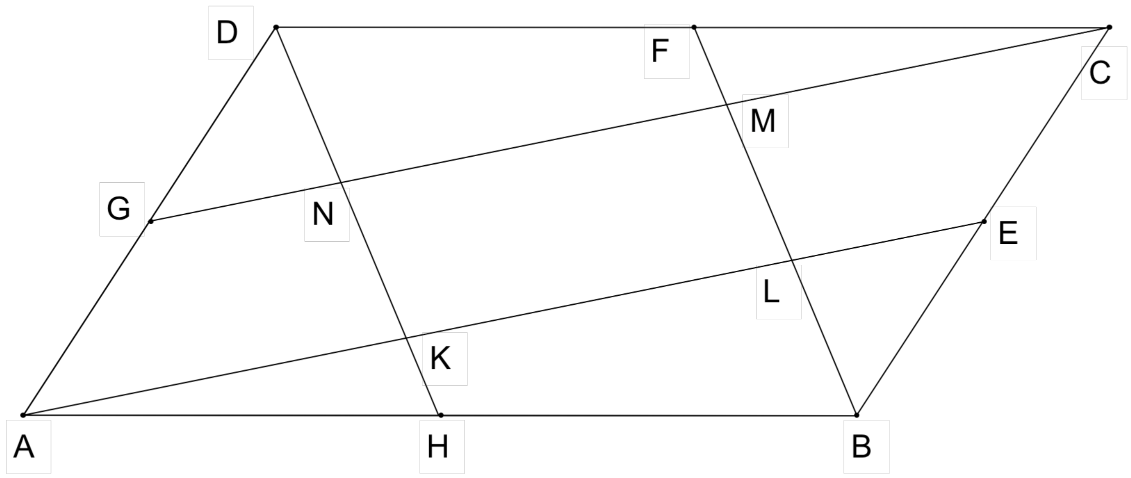
____ ____ ____ ____

2 Zahlix hat die anderen vier Würfel aus einem anderen Netz gefaltet. Wie sieht das Netz aus? Trage die fehlenden Zeichen ein.



Extraaufgabe (auf <u>extra</u> Zettel an Herrn Albers)

Olympiade-Aufgabe 430924 (43. Olympiade, Klasse 9, 2.Runde)
Gegeben sei ein Parallelogramm ABCD. Die Seitenmitten seien entsprechend der Abbildung mit E, F, G, H bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ schneiden im Inneren des Parallelogramms ein Viereck KLMN aus.



a. Beweise, dass das Viereck KLMN ein Parallelogramm ist.
b. Berechne, welcher Teil der Fläche des Ausgangsparallelogramms ABCD vom Viereck KLMN bedeckt wird.