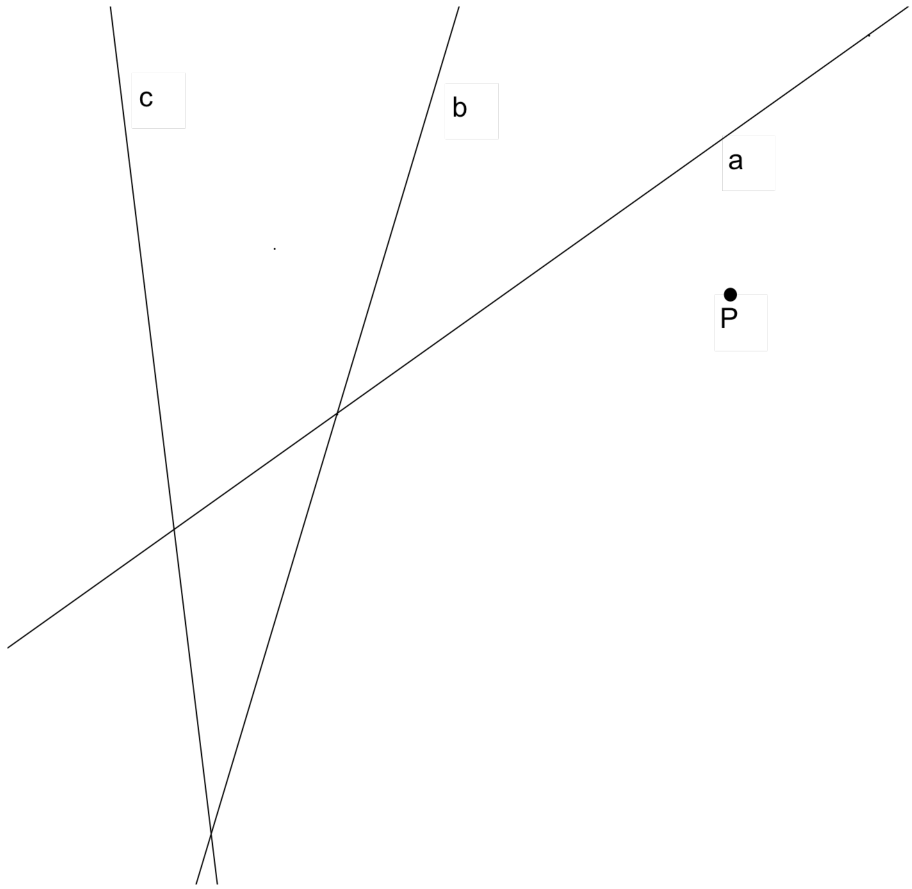
8. Übung
Verknüpfung von Spiegelungen

Präsenzübungen (für 13./14.6.)

1. Analysieren Sie, was die VerfasserIn wohl mit dem jeweiligen Satz aussagen wollte. Verbessern Sie sie.
   (Alles Originalzitate aus der letzten Zwischenprüfungsklausur)
   a. „Spiegelungen sind orthogonal zur Spiegelachse“
   b. „Bei einer Geradenspiegelung werden Geraden wieder auf Geraden abgebildet, die längentreu sind.“
   c. „Die Spiegelung ist eine Kongruenzabbildung auf sich (in der Ebene).“
   d. $\alpha = \beta$, denn beides sind Nebenwinkel von kongruenten Dreiecken
   e. Die Spiegelachse bildet den Punkt A ab auf den Bildpunkt A’
   f. Die Punkte und Bildpunkte liegen senkrecht auf der Achse.

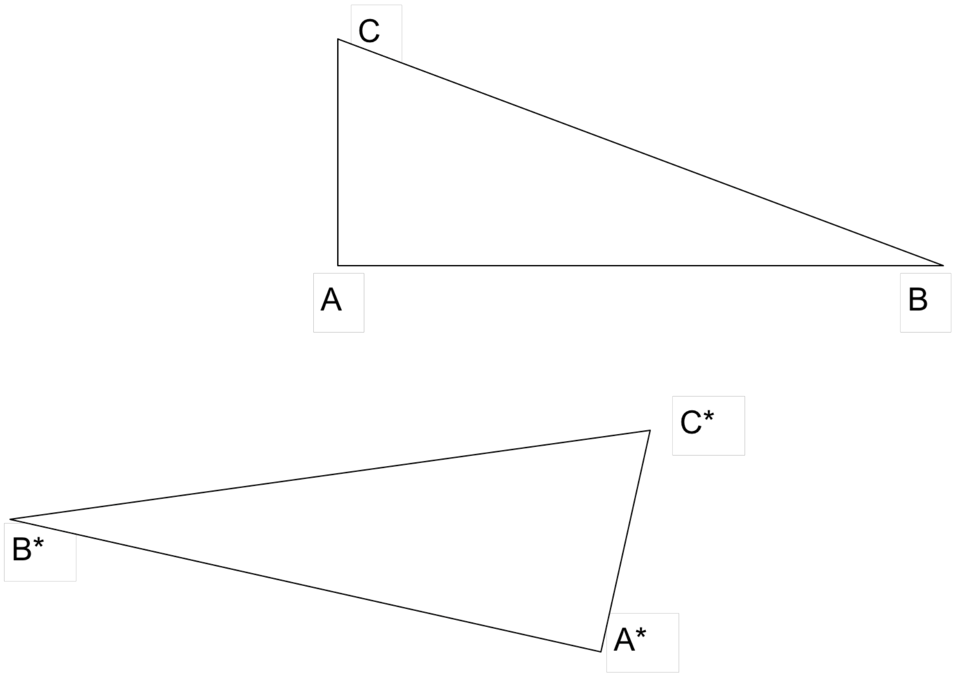
2. Gegeben sind die drei Spiegelungsachsen a, b und c. Konstruieren Sie zur Verknüpfung der drei Spiegelungen $S_c \circ S_b \circ S_a$ die Schubspiegelung. Machen Sie die Probe, indem Sie einerseits den Punkt P an a, dann b und dann c spiegeln und andererseits mit der Schubspiegelung abbilden.



Hausübungen (Abgabe: Fr, 16.6.)

3. Die Verknüpfung einer Spiegelung Sa an der Achse a mit einer Spiegelung Sb an der Achse b ergibt eine Drehung um den Schnittpunkt von a und b. Der Drehwinkel ist der doppelte Winkel zwischen a und b.
    a. Was erhalten Sie, wenn Sie die Reihenfolge der Spiegelungen vertauschen, also statt $S_b \circ S_a$ die Verknüpfung $S_a \circ S_b$ betrachten?
    b. Beweisen Sie für zwei verschiedene Geraden, also $a \neq b$:
    $a \perp b \Leftrightarrow S_a \circ S_b = S_b \circ S_a$

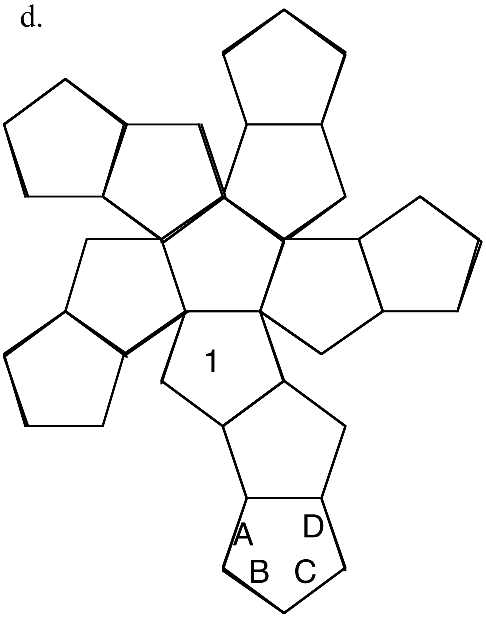
4. Individuelle Zeichenübung (von jeder StudentIn individuell anzufertigen)
Das Dreieck A*B*C* ist durch eine (gegensinnige) Kongruenzabbildung aus dem Dreieck ABC hervorgegangen. Finden Sie drei Spiegelungsachsen a, b und c, so dass die Verknüpfung der drei Spiegelungen $S_c \circ S_b \circ S_a$ das Dreieck ABC abbildet auf das Dreieck A*B*C*. Beschreiben Sie, wie Sie die Achsen gewählt/gefunden haben.

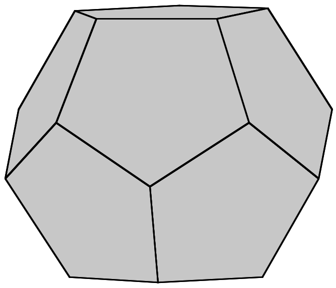


5. Gegeben ist ein Kreis und auf diesem vier verschiedene Punkte A, B, C und D. Diese bilden ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, das einen Umkreis hat.
    a. Beweisen Sie, dass in einem Sehnenviereck die Summe der Größe von gegenüberliegenden Winkeln 180° ist.

    Seien a die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$, b die Mittelsenkrechte zu $\overline{BC}$, c die Mittelsenkrechte zu $\overline{CD}$ und d die Mittelsenkrechte von $\overline{DA}$. Betrachten Sie die Verknüpfung der vier Spiegelungen $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$.
    b. Welche beiden Punkte sind offensichtlich Fixpunkte der Abbildung $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$?
    c. Begründen Sie, dass die Abbildung $S_d \circ S_c \circ S_b \circ S_a$ die Identität sein muss.

6. d.





Die Bilder zeigen das Netz eines Dodekaeders und einen Dodekaeder selbst. Im Netz sind vier Kanten mit A, B, C und D gekennzeichnet und eine Fläche mit 1.

a. Markieren Sie die Kante mit A, die an die mit A markierte Kante stößt. Verfahren Sie entsprechend mit B, C und D.

b. Markieren Sie die Fläche mit 1, die der mit 1 markierten Fläche gegenüber liegt.

Extraaufgabe (auf <u>extra</u> Zettel an Herrn Albers)

Olympiade-Aufgabe 430844 (43. Olympiade, Klasse 8, 4.Runde)

Also: Das erwartet man von einem 8.Klässler, wenn sich in der Bundesrunde die 190 besten Mathematikschüler Deutschlands treffen und Aufgaben lösen:

Es sei ABCD ein Viereck, das folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. ABCD ist ein Rhombus mit der Seitenlänge a.
2. Der Winkel BAD hat die Größe 60°.
3. Auf der Strecke $\overline{CD}$ liegt ein Punkt E, und auf der Strecke $\overline{AD}$ ein Punkt F derart, dass die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ gleich lang sind.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BEF gleichseitig ist.