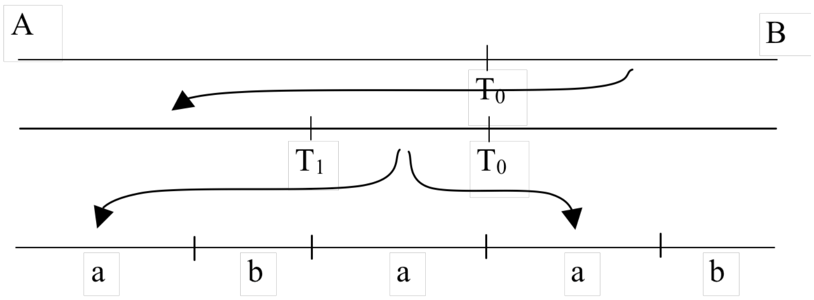
Sommersemester 2006
Reimund Albers

Geometrie
erleben

5./6. Übung
regelmäßiges Fünfeck, goldener Schnitt, Diedergruppen, Parkettierung

Präsenzübungen (für 23./24.5.)

1. Fortgesetzte Teilung
   Teilt man eine Strecke mit dem Goldenen Schnitt, so erhält man einen größeren Abschnitt („Major“) und einen kürzeren Abschnitt („Minor“).



   Legt man nun den Minor linksbündig in den Major, so entsteht im Major ein Teilungspunkt.
   Bild: 1. Schritt: Der Minor $\overline{T_0B}$ wird in $\overline{AT_0}$ gelegt mit T_0 bei A. Der neue Teilungspunkt ist T_1.
   a. Beweisen Sie, dass T_1 die Strecke $\overline{AT_0}$ wiederum im Goldenen Schnitt teilt. (Verwenden Sie die Definition: Ein Punkt T teilt eine Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt, wenn gilt: $\frac{|AT|}{|AB|} = \frac{|TB|}{|AT|}$)
   b. Bezeichnet man nach jeder Teilung die längere Strecke mit a und die kürzere mit b, so liefert die erste Teilung durch T die Streckenabfolge „ab“. Nach dem ersten Legen des Minors in den Major erhält man „aba“. Nach dem zweiten Legen der kürzeren Strecke in alle längeren erhält man „abaab“ (siehe Bild oben)
   Setzen Sie diesen Prozess fort. Suchen Sie nach Gesetzmäßigkeiten und begründen Sie sie.

Präsenzübungen (für 30./31.5.)

2. In einer Ecke des Parketts sollen 3 Polygonecken zusammenstoßen.
   a. Erläutern Sie, dass dieser Ansatz zu folgender Bedingung für die Winkelgrößen der Polygonecken führt:
   $$180° \cdot \frac{n-2}{n} + 180° \cdot \frac{m-2}{m} + 180° \cdot \frac{k-2}{k} = 360°$$
   b. Lösen Sie die Gleichung nach n auf.

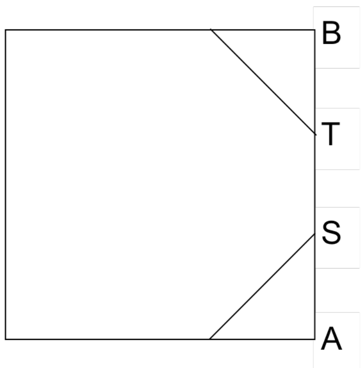
c. Suchen Sie durch systematisches Probieren und Überlegungen zur Teilbarkeit einige (problemorientierte) Lösungen der Gleichung aus b).
d. Prüfen Sie, ob ihre Lösungen der Gleichung auch tatsächlich eine Lösung des globalen Parkettierungsproblems sind.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 2.6.)

3. Es sei ABCD ein Quadrat mit dem Diagonalenschnittpunkt M. X sei ein beliebiger Punkt auf der Strecke $\overline{DM}$. Das Lot von X auf die Seite $\overline{AB}$ hat den Fußpunkt E, das Lot von X auf die Seite $\overline{DA}$ hat den Fußpunkt F.
    a. Fertigen Sie nach dieser Beschreibung eine Zeichnung an.
    b. Beweisen Sie, dass $\triangle AEC \cong \triangle DFB$
    c. Beweisen Sie, dass $|CX| = |EF|$.

4. Erläutern Sie, wie man mit einem beliebigen, aber konvexem Viereck die Ebene parkettieren kann. Begründen Sie, dass die Winkelbedingung in jedem Knoten der Parkettierung erfüllt ist.
(Eine Figur heißt ganz allgemein konvex, wenn zu je zwei Punkten aus dem inneren der Figur auch die Verbindungsstrecke ganz in der Figur liegt. Bei Polygonen bedeutet das, dass kein Innenwinkel größer als 180° ist.)

5. Aus einem Quadrat soll ein regelmäßiges Achteck konstruiert werden, indem die Ecken „abgeschnitten“ werden. Wie müssen die Teilungspunkte S und T gewählt werden? Berechnen Sie den exakten Wert (Wurzel angeben) und den Näherungswert für ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm.



6.

		zweite Abbildung							
		D_0	**D_{90}**	**D_{180}**	**D_{270}**	**S_0**	**S_{45}**	**S_{90}**	**S_{135}**
Erste Abbildung	**D_0**	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_0	S_{45}	S_{90}	S_{135}
	D_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0	S_{135}	S_0	S_{45}	S_{90}
	D_{180}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}	S_{90}	S_{135}	S_0	S_{45}
	D_{270}	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}	S_{45}	S_{90}	S_{135}	S_0
	S_0	S_0	S_{45}	S_{90}	S_{135}	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}
	S_{45}	S_{45}	S_{90}	S_{135}	S_0	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}
	S_{90}	S_{90}	S_{135}	S_0	S_{45}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}
	S_{135}	S_{135}	S_0	S_{45}	S_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0

Die Tabelle zeigt die vollständige Verknüpfungstabelle für die Decktransformationen eines Quadrats.

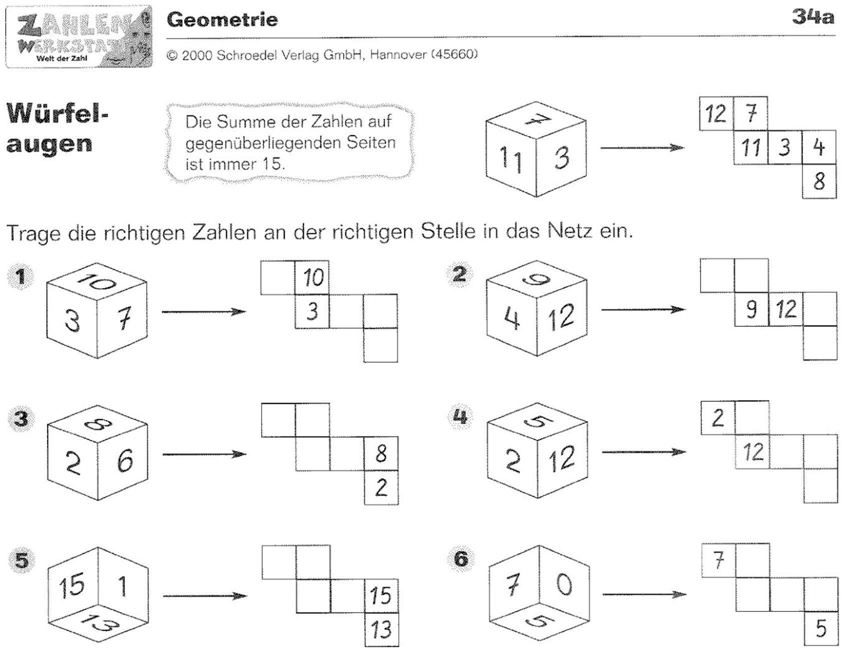
a. Testen Sie folgende Beispiele für das Assoziativgesetz:
$(D_{90}oS_{45})oS_{90}$ und $D_{90}o(S_{45}oS_{90})$
$(S_0oS_{135})oD_{180}$ und $S_0o(S_{135}o\ D_{180})$
$(D_{90}oS_{135})oD_{270}$ und $D_{90}o(S_{135}o\ D_{270})$

b. Bestimmen Sie X in den folgenden Gleichungen
$XoD_{90} = S_0$ $\qquad D_{90}oX=S_0$ $\qquad D_{180}oXoD_{90} = S_{45}$

7. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ bilden mit der **Addition** eine Gruppe.
   a. Was ist das neutrale Element?
   b. Was ist zu jeder Zahl das inverse Element?
   c. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit der **Subtraktion** keine Gruppe. Gehen Sie die vier Eigenschaften Abgeschlossenheit, Assoziativgesetz, neutrales Element, inverses Element durch und erläutern Sie, ob sie erfüllt sind. Wenn nicht, geben Sie mindestens ein Gegenbeispiel an.

8. Räumliches Vorstellungsvermögen

Aus einem Arbeitsheft für die 4. Klasse



Extraaufgabe (auf <u>extra</u> Zettel an Herrn Albers)

Dieses Mal gibt es keine Olympiade-Aufgabe (obwohl es gut eine sein könnte), sondern meine Lieblingsaufgabe zum goldenen Schnitt/Fünfeck. Ist aber ein wenig trickreich. Aber alles, was man braucht, haben wir schon besprochen.

Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$. Zu dieser möchte man die Diagonalenlänge d für das Fünfeck konstruieren. Dazu geht man folgendermaßen vor:

Konstruiere zu $\overline{AB}$ das gleichseitige Dreieck ABC. Konstruiere dazu das doppelt so große gleichseitige Dreieck DEC. Also ist A die Mitte von $\overline{DC}$ und B die Mitte von $\overline{EC}$. Konstruiere zum Dreieck DEC den Umkreis. Verlängere $\overline{AB}$ über B bis zum Schnittpunkt F mit dem Kreis. Dann ist $|AF| = d$ die gesuchte Diagonalenlänge. Beweis?