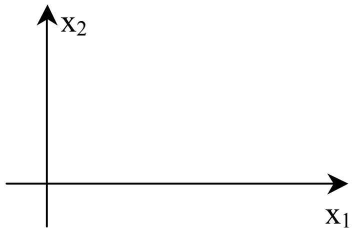
Analytische Geometrie der Kongruenzabbildungen

Grundlagen, Begriffe, Schreibweisen

Achsenkreuz

Die Achsen heißen in dieser Darstellung x_1 und x_2-Achse.



Punkte

Punkte werden weiterhin mit großen, lateinischen Buchstaben bezeichnet und im Koordinatensystem mit zwei Koordinaten festgelegt. Sie werden konsequenterweise mit „erster“ und „zweiter“ Koordinate bezeichnet. Sehr oft werden die Koordinaten mit dem kleinen Buchstaben bezeichnet, der zum Punktnamen gehört. Zum Beispiel: $P(p_1;p_2)$

Vektoren

Jedem Punkt wird ein Ortsvektor zugeordnet, der im Ursprung beginnt und in dem Punkt endet. Punkte und Ortsvektoren sind in diesem Skript äquivalent. Die Rechnungen, die zu Abbildungen ausgeführt werden, werden in der Matrix-Vektor-Notation durchgeführt.

Schreibweise: Punkt $P(p_1;p_2)$, Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

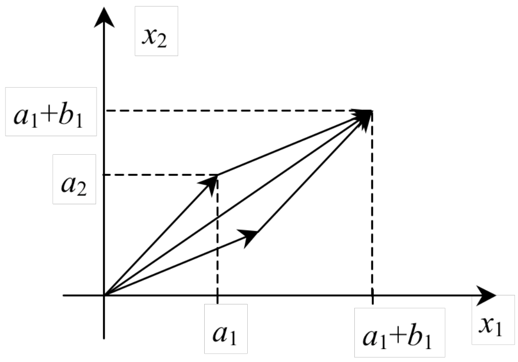
Rechnen mit Vektoren

a) Skalar-Multiplikation

Wenn k eine reelle Zahl ist und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor, dann ist die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl erklärt durch $k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$

b) Addition

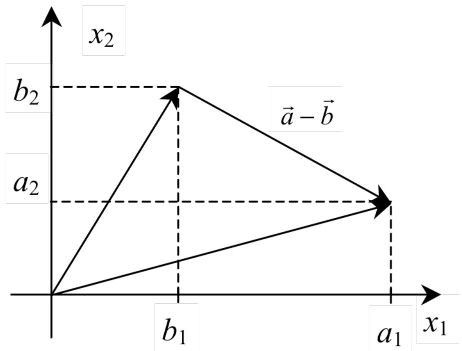
Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, so ist die Addition von zwei Vektoren erklärt durch $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$



c) Subtraktion

Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren, so ist die Subtraktion von zwei Vektoren erklärt durch

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$



Abbildungen

Wir betrachten hier nur Abbildungen, die eine Gerade in eine Gerade abbilden und die Parallelität erhalten. Solche Abbildungen heißen affine Abbildungen.
Eine affine Abbildung, die dem Ausgangspunkt X(x_1;x_2) den Bildpunkt X'(x'_1;x'_2) zuordnet, hat die Form

Koordinatenschreibweise:

$$x_1' = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + d_1$$
$$x_2' = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + d_2 \quad \text{mit } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

Matrix-Vektor-Schreibweise

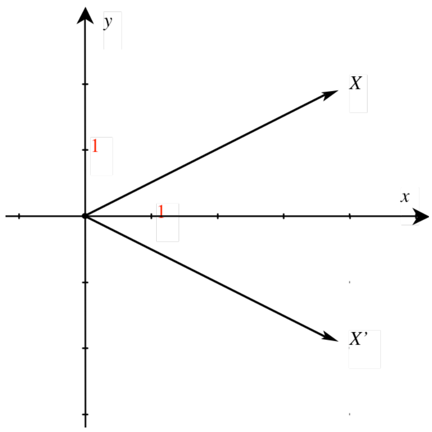
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

die man symbolisch verkürzen kann zu $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{d}$.
Dabei ist A die Abbildungsmatrix und $\vec{d}$ der Verschiebungsvektor.

Beispiele für Abbildungen

1. Identische Abbildung
   Die identische Abbildung bildet jeden Punkt auf sich selbst ab. Für jeden Punkt X(x_1;x_2) gilt also: X'(x'_1;x'_2) = X(x_1;x_2). Damit lauten die Abbildungsgleichungen:
   $\begin{matrix} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{matrix}$ oder ausführlich $\begin{matrix} x'_1 = 1x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \\ x'_2 = 0 \cdot x_1 + 1x_2 + 0 \end{matrix}$. Die Abbildungsmatrix ist dann $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Einheitsmatrix genannt.

2. Spiegelung an der x_1-Achse
   Da der Ursprung O auf der Spiegelachse liegt, wird er auf sich selbst abgebildet. Folglich ist $\vec{d} = \vec{0}$. Für die Koordinaten gilt offensichtlich
   $\begin{matrix} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_2 \end{matrix}$ oder in der ausführlichen Koordinaten-schreibweise $\begin{matrix} x_1' = 1x_1 + 0x_2 \\ x_2' = 0x_1 - 1x_2 \end{matrix}$, was sofort zur Matrix-Vektor-Schreibweise $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ führt.



3. Verschiebung
   Bei der Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird jeder Punkt in x_1-Richtung um eine Einheit nach rechts und in x_2-Richtung um 3 Einheiten nach oben verschoben. Es gilt also:

$x_1' = x_1 + 1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1$
$x_2' = x_2 + 3 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3$ oder in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir wollen letztlich zu den Kongruenzabbildungen die Abbildungsgleichungen bestimmen. Für das Aufstellen von Abbildungsgleichungen sind die nachfolgenden beiden Sätze hilfreich.

<u>Satz über die Verschiebung des Ursprungs</u>
Gegeben ist die Abbildung $\overrightarrow{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{d}$.
$\vec{d} = \vec{0} \Leftrightarrow$ Der Ursprung O(0;0) wird auf sich selbst abgebildet, also O = O'.

Beweis:
Setzt man den Vektor für den Ursprung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in die Abbildungsgleichung ein, so ergibt sich für den Bildvektor $x_1' = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + d_1 = d_1$ und $x_2' = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + d_2 = d_2$, also $\vec{x}' = \vec{d}$. Dann ist $\vec{x}' = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{0}$

Das Auffinden der Abbildungsmatrix zu einer geometrisch gegebenen Abbildung wird durch folgende prinzipielle Überlegung ganz erheblich vereinfacht:

<u>Satz über das Aufstellen der Abbildungsmatrix</u>
Ist der Verschiebungsvektor $\vec{d} = \vec{0}$, so gilt:
Die Abbildungsmatrix ist $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ Der Basisvektor $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf $\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\overrightarrow{e_2}' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ abgebildet.

Beweis:
„⇒"
Die Abbildung lautet also $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x}$. Setzt man $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein, so ergibt sich sofort $\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Ebenso er gibt das Einsetzen von $\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sofort $\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

„⇐"
Wegen $\vec{d} = \vec{0}$ und da die Abbildungsmatrix unbekannt ist, lautet die Abbildung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \vec{x}$. Setzt man $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_1}'$ ein, so erhält man $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, also $a_{11} = a$ und $a_{21} = b$. Setzt man entsprechend $\overrightarrow{e_2}$ und $\overrightarrow{e_2}'$ ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \text{ also } a_{12} = c \text{ und } a_{22} = d .$$

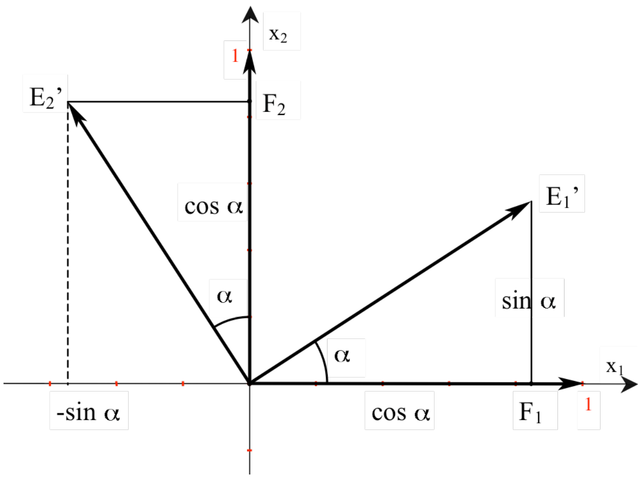
Damit ist die Abbildungsmatrix bestimmt.

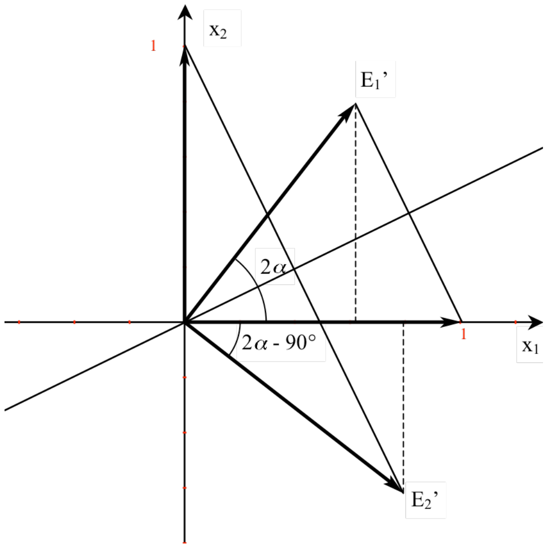
Die Abbildungsgleichungen der Kongruenzabbildungen

Mit dem Satz über das Aufstellen der Abbildungsmatrix stellen wir nun die Abbildungsmatrizen für Drehungen und Spiegelungen auf.

Drehung um den Ursprung O um den Winkel α (siehe nachfolgende Zeichnung, links)

> Die **Drehung** um den Ursprung O um den Winkel α ist gegeben durch $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$, wobei die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ist.





Spiegelung an einer Geraden, die mit der x_1-Achse den Winkel α einschließt

> Die **Spiegelung** an einer Geraden, die durch den Ursprung O verläuft und mit der x_1-Achse den Winkel α einschließt, ist gegeben durch $\vec{x}\,' = A \cdot \vec{x}$, wobei die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ ist.

In der Euklidischen Geometrie hatten wir eine Verschiebung durch einen Verschiebungsvektor beschrieben, der wiederum durch einen Anfangs- und Endpunkt gegeben war. In der Koordinatenebene wird bei einer Verschiebung der Ursprung O nicht auf sich selbst abgebildet, sondern in einen Bildpunkt O'≠ O verschoben. Nach dem Satz über die Verschiebung des Ursprungs ist der Verschiebungsvektor $\vec{d}$. Da eine Verschiebung um den Nullvektor die Identität ergibt, muss die Abbildungsmatrix die Einheitsmatrix sein.