Reimund Albers, Geometrie erleben, Modul EM1.2

13. Übung, Lösungsskizzen So Se 06

1. $T_1: \quad \vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$Z: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} \vec{x}$

$S_{45}: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

$T_2: \quad \vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verknüpfung

$T_2 \circ S_{45} \circ Z \circ T_1:$

$$\vec{x}^{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\vec{x}^{IV} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}}}$$

2. Das Quadrat ABCD mit dem Zentrum in den Ursprung

$T_1: \quad \vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \end{pmatrix}$

Stauchen mit Faktor $\frac{3}{4}$

$Z: \quad \vec{x}'' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \vec{x}'$

Drehung um 270°

$D_{270}: \quad \vec{x}''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}''$

Verschiebung des Zentrum an die Position des Quadrats $A^*B^*C^*D^*$ bei (3,5 ; 7,5)

$T_2: \quad \vec{x}^{IV} = \vec{x} + \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$

Verknüpfung

$T_2 \circ D_{270} \circ Z \circ T_1$: $\vec{x}^{IV} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\left[\vec{x} + \begin{pmatrix}-11\\ -11\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}3{,}5\\ 7{,}5\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 0\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-11\\ -11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3{,}5\\ 7{,}5\end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{x}^{IV} = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & 0\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}-4{,}75\\ 15{,}75\end{pmatrix}}$$

Probe: $A(9;9)$ $\quad A^*$: $\vec{a}^* = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\cdot 9 - 4{,}75\\ -\frac{3}{4}\cdot 9 + 15{,}75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 9\end{pmatrix}$ stimmt

3. $8 \mid 3^{2n} + 7$

a) Ind. Anfang: $n = 1$ $\quad 3^{2\cdot 1} + 7 = 9 + 7 = 16 \quad 8 \mid 16$ ✓

Induktionsschluss:

Ind. Vorauss.: $8 \mid 3^{2n} + 7$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $8k = 3^{2n} + 7$

Ind. Behauptung: $8 \mid 3^{2(n+1)} + 7$

Ind. Beweis:

$$3^{2(n+1)} + 7 = 3^{2n}\cdot 9 + 7 = (3^{2n} \underbrace{+7}_{*})\cdot 9 \underbrace{-63}_{\text{Korrektur von } *} + 7$$

Induktionsvorauss.

$$= 8k\cdot 9 - 56$$

$$= 8\underbrace{(9k - 7)}_{\in \mathbb{N}} \quad \text{also durch 8 teilbar}$$

q.e.d.

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen

b) $3^{2n} + 7 = (3^2)^n + 7 = 9^n + 7$ $\quad$ da $9 \equiv 1 \mod 8$ und $7 \equiv -1 \mod 8$

$9^n + 7 \equiv 1^n + (-1) \mod 8$

$\equiv 0 \mod 8$ $\quad$ Also ist $9^n + 7$ durch 8 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$

---

* „Was nicht passt, wird passend gemacht"