Reimund Albers   Geometrie erleben   Modul EM 1.2

12. Übung, Lösungsskizzen   SoSe 06

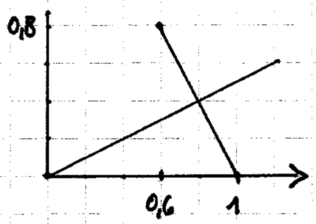
1. 1. Lösungsweg: $\cos 2\alpha = 0{,}6 \quad 2\alpha \approx 53{,}13^\circ \quad \alpha \approx 26{,}57^\circ$

Die Sp. Achse verläuft durch O und schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von $26{,}57^\circ$ ein

2. Lösungsweg: Man bildet einen Punkt A ab. Die Sp Achse ist dann die Mittelsenkrechte von $\overline{AA'}$.

3. Lösungsweg: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ Die SpAchse ist die Winkelhalbierende zwischen beiden Vektoren

4. Lösungsweg:



Da $E_1(1;0) \to E_1'(0{,}6; 0{,}8)$ hat die Strecke $\overline{E_1E_1'}$ die Steigung -2. Dann hat die SpAchse die Steigung $+\frac{1}{2}$.

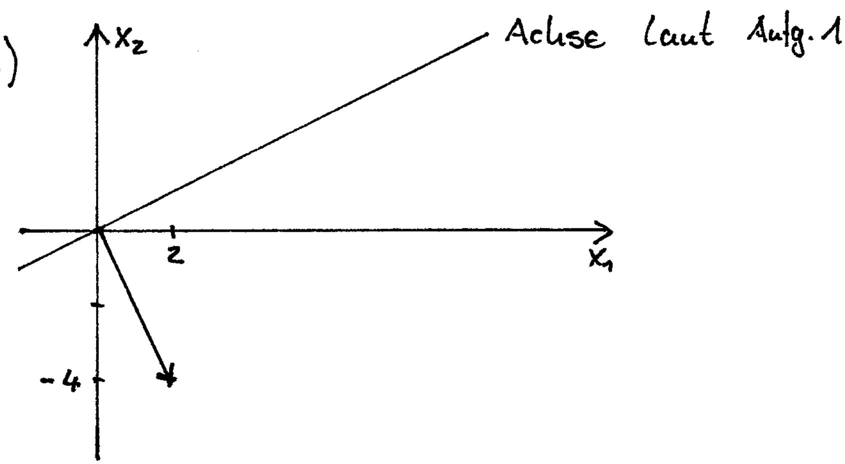
2. a) Involutorisch, also selbstinvers

Wendet man die Abbildung zwei Mal an, erhält man die Identität.

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

b)



2c) 1. Lösungsweg: Man löst die Verschiebung auf in zwei Spiegelungen. Die Achsen sind parallel zur Spiegelungsachse der durch die Matrix gegebenen Spiegelung. Der Abstand ist die halbe Länge des Verschiebungsvektors. Legt man die erste Achse auf die Achse der „Matrixspiegelung", also durch O, so verläuft die zweite Achse durch (1; −2). Das ist die SpAchse für die Gesamtabbildung.

2. Lösungsweg: Man bildet einen Punkt A ab. Die Spiegelungsachse ist dann die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$

3. Lösungsweg: Man sucht Beispiele für Fixpunkte

Ansatz: $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{x} \iff \begin{cases} -0{,}4\,x_1 + 0{,}8\,x_2 = -2 \\ 0{,}8\,x_1 - 1{,}6\,x_2 = 4 \end{cases}$

Man sieht, dass 1. Gl. $\cdot (-2)$ = 2. Gl.

~~Beisp~~ Auflösen einer Gleichung nach x_2:

$x_2 = \frac{1}{2} x_1 - 2{,}5$ Das ist die Gleichung der Spiegelungsachse

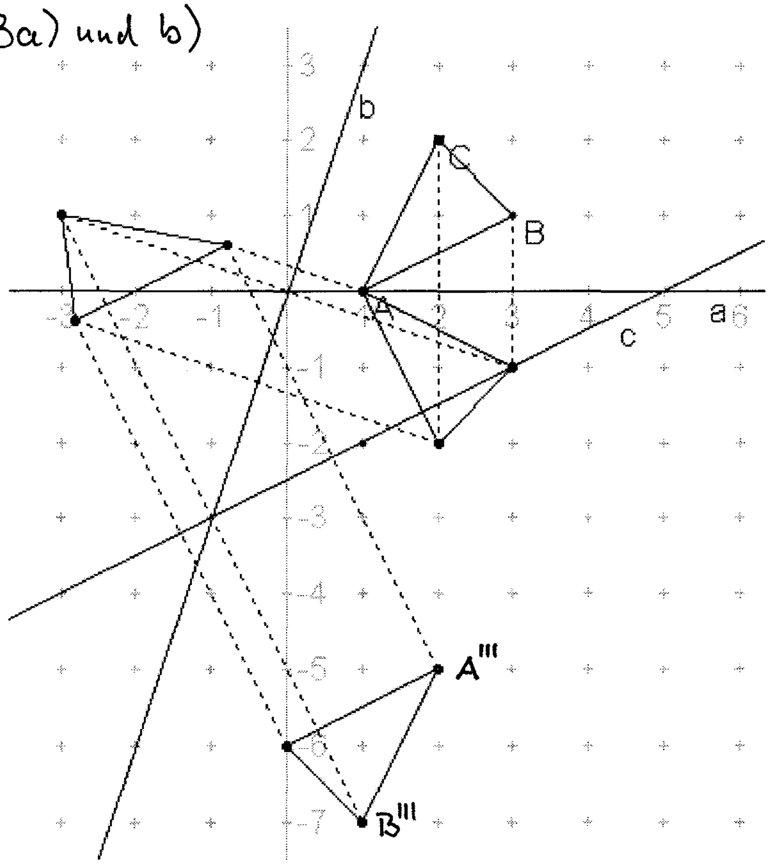
Hausübungen

3a) a ist offensichtlich die x_1-Achse

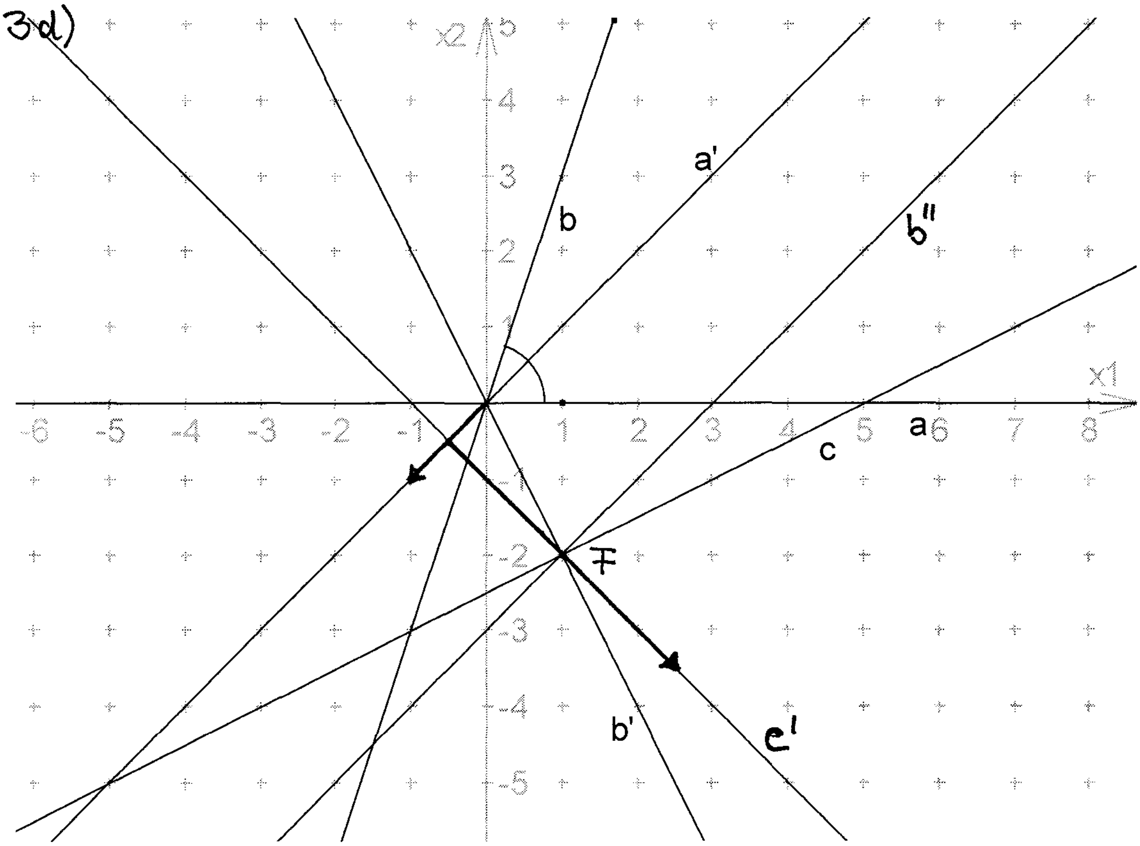
Analog zu Aufg 1 findet man, dass b durch den Ursprung geht und den Punkt (1; 3) (Steigung 3)

c wurde ausführlich in Aufg 2 bestimmt

3a) und b)



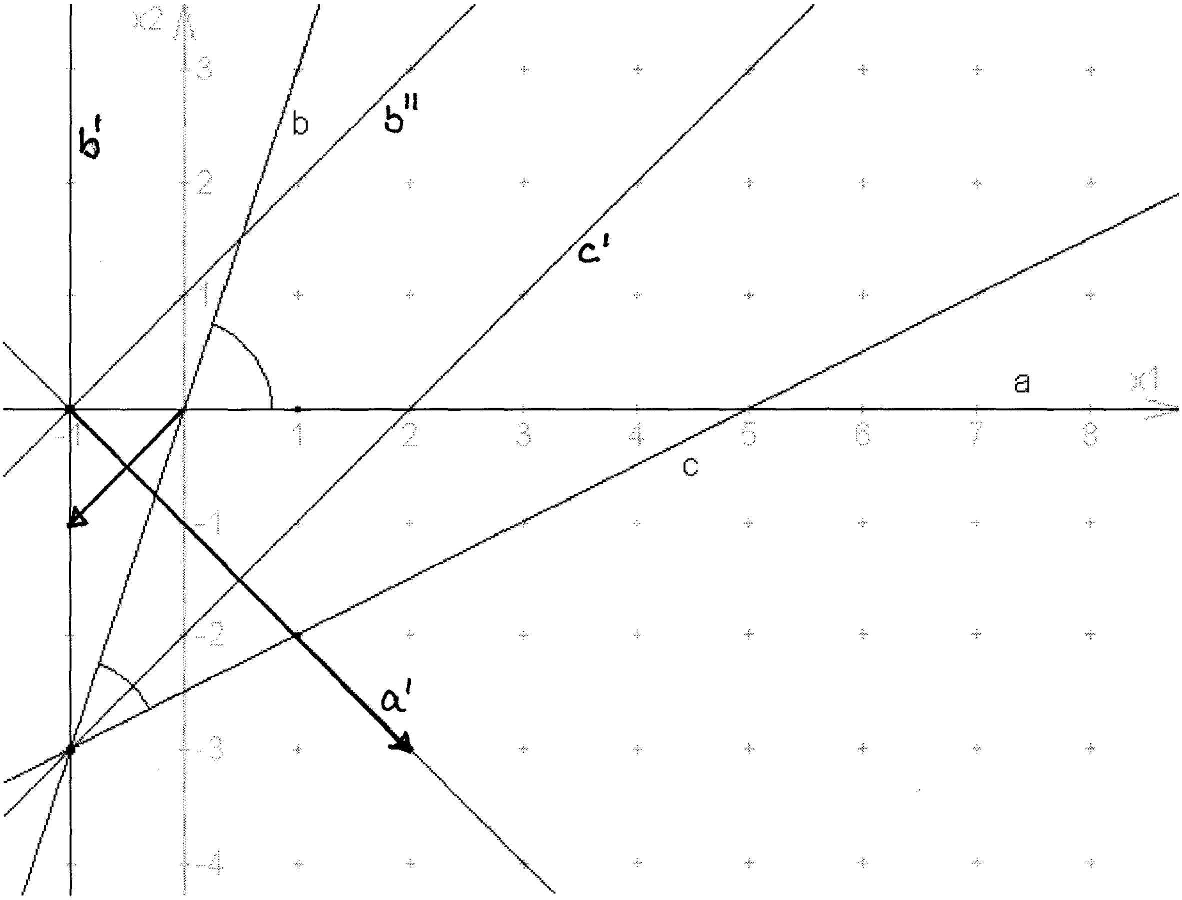
3d)



$b' \perp c \qquad |\sphericalangle a,b| = |\sphericalangle a',b'|$

$b'' \parallel a' \qquad |\sphericalangle b'',c'| = |\sphericalangle b',c| = 90^\circ$

3d)



$b' \perp a \qquad |\measuredangle\, b, c| = |\measuredangle\, b', c'|$

$b'' \parallel c' \qquad |\measuredangle\, a, b'| = |\measuredangle\, a', b''| = 90°$

3c) Verkettung $S_c \circ S_b \circ S_a$

$$\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$A(1;0) \rightarrow A'''(2;-5)$

$B(3;1) \rightarrow B'''(1;-7)$

$C(2;2) \rightarrow C'''(0;-6)$

Die rechnerischen Ergebnisse stimmen genau mit der Zeichnung überein

3d) In beiden Zeichnungen erhält man für die Verschiebung parallel zur Spiegelachse den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Man kann den Verschiebungsvektor zerlegen:

$$\vec{x}''' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung an der verschobenen Achse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\text{Verschiebung parallel zur SpAchse}}$$

4. <u>Induktionsanfang</u> $\quad n = 1$

linke S.: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

stimmt!

rechte S.: $\quad \displaystyle\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

<u>Induktionsschluss</u>

Voraussetzung: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Behauptung: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

Beweis: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Indukt. Vorauss.

$$= \frac{n\cancel{+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \quad \text{q.e.d.}$$

Durch den Induktionsanfang für $n=1$ und den Induktionsschluss von n auf $n+1$ ist gezeigt, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe zum räuml. Vorst.

Der Körper besteht aus $3 + 6 + 3 = \underline{\underline{12}}$ Flächen

$\rightarrow$ 24 Flächenecken mit stumpfen W. $\xrightarrow{:3}$ 8 Ecken

24 " " spitzen W. $\xrightarrow{:4}$ 6 Ecken

zusammen $\underline{\underline{14}}$ Ecken

12 Flächen $\xrightarrow{\cdot 4}$ 48 Flächenkanten $\xrightarrow{:2}$ $\underline{\underline{24}}$ Körperkanten